LÓGICA DAS EQUIVALÊNCIAS[*]

Ana Paula Jahn
Maria José Ferreira da Silva
Maria Célia Leme da Silva
Tânia Maria Mendonça Campos
PUC-SP

INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é analisar a maneira como tradicionalmente tem sido introduzido o conceito de fração no primeiro grau e as possíveis conseqüências dessa forma de ensino e verificar, a seguir empiricamente se as deficiências detectadas nessa maneira de ensinar, de fato se refletem no comportamento dos alunos. A primeira parte do trabalho contém uma breve análise de alguns aspectos do ensino e hipóteses relativas ao resultado desse ensino. Na segunda parte faremos uma investigação empírica dessas previsões. Na terceira parte, concluímos com uma crítica em relação ao método.

A – O ENSINO TRADICIONAL: AS FRAÇÕES COMO NOME DAS PARTES DE UM INTEIRO

Uma análise feita nos livros didáticos nos mostra que em São Paulo, as crianças têm o primeiro contato com frações a partir de modelos geométricos, em geral, na terceira série do primeiro grau. Figuras simples – como quadrados, retângulos e círculos – ou objetos – como maçãs, chocolates e laranjas – são divididos em partes ditas iguais. A fração pode aparecer também definida de uma maneira geral ou através da identificação de frações específicas. Por exemplo, o livro “Alegria de Saber”[1] da quarta série, introduz o conceito de fração oferecendo a seguinte definição geral: “***Fração** é cada uma das partes do inteiro ou da unidade*”. Em contraste, o livro “Crescer em Matemática”[2] utiliza um processo indutivo, definindo metade, terça parte,... Segundo nossa análise, a primeira conseqüência desse ensino seria a interpretação das frações de uma maneira extremamente específica, significando o nome que se dá às partes de um inteiro. Dentro dessa interpretação, os

[*] Este artigo é parte de um projeto de pesquisa parcialmente financiado pelo INEP.
[1] Alegria de Saber, Lucina Passos e outros, 4ª série, Editora Scipione, 1992, p. 87.
[2] Crescer em Matemática, Ana Thereza, 3ª. série, FTD, 1990, pp.84-86.

alunos poderiam estar simplesmente aprendendo a linguagem de frações, sem necessariamente compreender seu significado enquanto número.

Um segundo aspecto observado, foi a posição ambígua com relação à necessidade de que o inteiro esteja dividido em partes iguais para que se possa utilizar essa linguagem. Enquanto, por um lado, as definições referem-se a partes iguais, por outro lado as ilustrações nem sempre respeitam essa igualdade. Uma laranja, uma maçã ou um pão dificilmente são divididos em partes iguais e, em algumas figuras, as partes são visivelmente desiguais (ver figura 1, anexo 1). Embora nas definições verbais a igualdade apareça como parte do enunciado, nas ilustrações o rigor dessa igualdade é facilmente esquecido, o que pode resultar numa conceituação das frações como sendo porções mais ou menos iguais do inteiro. Portanto, podemos prever que seja possível a aceitação de partes desiguais como frações entre alunos expostos a esse ensino.

Um terceiro aspecto do ensino de frações nos livros que analisamos refere-se à passagem que deve ser feita da figura geométrica para o *"nome da fração"*. As ilustrações mostram sempre a divisão do inteiro explicitando todas as partes envolvidas, ou seja, todos os traços da divisão aparecem no desenho. Dessa forma, pode-se passar do desenho ao nome da fração através de uma regra de dupla contagem: o denominador é o número de partes em que o inteiro foi dividido e o numerador é o número de partes que foram tomadas (ver figura 2, anexo 1).

A partir desse modelo, é possível antecipar algumas dificuldades dos alunos com frações, por exemplo, se a divisão do inteiro não mostrar explicitamente todos os cortes, os alunos apresentarão dificuldades em identificar corretamente a fração representada, pois a regra da dupla contagem o levaria a uma resposta incorreta. Se um inteiro for dividido, por exemplo, ao meio e uma das metades – digamos a parte não pintada da figura – for novamente dividida ao meio, um aluno que utilize a regra de dupla contagem poderia dizer que a fração representada é *"um terço"* enquanto que um aluno que utilize uma análise das relações parte-todo, identificaria a fração representada ou como *"metade"* ou como *"dois quartos*". A regra de dupla contagem levaria o aluno a centrar-se nos números específicos resultantes da contagem (por exemplo, 1/2 ou 2/4 ou 3/6), obscurecendo a relação parte-todo, que lhe permitiria a constatação da equivalência.

A equivalência de frações geralmente é ensinada na quarta ou na quinta série, a partir de um procedimento prático para verificação da equivalência ou a partir de um exemplo apresentado como uma tabela (ver fig 3, anexo 1)[3], ou ainda reunindo-se essas duas formas de apresentação. O procedimento indicado nessa figura, consiste na comparação dos resultados da multiplicação cruzada – do numerador de uma fração pelo denominador da outra – e quando os produtos são iguais, as frações são equivalentes.

Observa-se então a não coerência entre esse procedimento e o conceito de fração apresentado anteriormente, o que nos leva a antecipar que esses alunos terão dificuldades na assimilação da noção de equivalência. Alguns livros apresentam ilustrações indicando 1/2, 2/4, 3/6 etc. de unidades iguais, o que poderia, em princípio, facilitar a percepção de que embora as frações sejam diferentes, elas eqüivalem a porções iguais da unidade. No entanto, seria otimista esperarmos que os alunos chegassem a dominar o conceito de equivalência, a partir de tais ilustrações, dentro de um ensino que apresenta frações como os nomes das partes de um inteiro.

Estas hipóteses encontram apoio em alguns estudos já apresentados na literatura. Kerslake (1986) por exemplo, observou que alunos ingleses, entrevistados em seu estudo, não demonstravam dificuldades em nomear as frações quando os inteiros mostravam divisões explícitas na figura ou mesmo, em indicar que frações eram equivalentes, quando os diagramas que as ilustravam eram apresentados simultaneamente. No entanto, a maioria dos alunos não utilizava o procedimento de encontrar frações equivalentes quando efetuavam a soma das frações dadas, somando os numeradores e os denominadores. Dentre as poucas crianças que utilizaram o procedimento de encontrar o mínimo múltiplo comum e somaram adequadamente as frações, nenhuma soube explicar por que razão tal procedimento precedia a execução da soma.

A partir dessas críticas, levantamos algumas hipóteses sobre o aprendizado do conceito de equivalência de frações resultante do processo de instrução através do modelo parte-todo, como uma simples regra bastante enfatizada nos livros didáticos e pelos professores. Primeiro, uma das regras do contrato didático[4] nesse modelo, é tal que o

[3] Integrando o Aprender, Maria Eugenia e outros, 4ª série, Editora Scipione, 1993, p.137.

[4] *Chamamos contrato didático, o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. Este contrato é o conjunto de regras que determinam explicitamente para uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente, o que cada*

professor apresenta sempre situações típicas, por exemplo, o inteiro sempre dividido em partes iguais em que o método de dupla contagem leva sempre a interpretações corretas. Dessa forma, a simples contagem de partes leva à linguagem correta para indicar a fração, sem que o aluno interprete, necessariamente, a fração como uma relação entre a parte e o inteiro enquanto unidade. Segundo, a contagem das partes nesse contexto, dificilmente resulta na compreensão das equivalências, pois esse tipo de ensino enfatiza a linguagem das frações, sendo ignoradas, como já dissemos, outras relações como a conservação de área, a manutenção da unidade, as diferentes representações, bem como as diferentes concepções de fração.

Como parte de um projeto de pesquisa mais amplo: "*Construção do Conceito de Fração",* realizamos um teste diagnóstico e algumas entrevistas, a fim de analisar alguns aspectos da construção do conceito e as conseqüências do método de ensino convencional, num modelo geométrico onde o inteiro nem sempre é dividido em partes iguais. Com isso, verificamos o desempenho das crianças em questões em que, a percepção da relação de equivalência é fundamental para verificar se o aprendizado desse conteúdo é significativo.

Como todos os alunos participantes já tinham recebido instrução escolar sobre fração, as questões apresentadas poderiam ser respondidas a contento a partir dessas instruções, o que nos permite identificar as falhas desse método e os motivos que levam alunos que já tenham estudado frações de maneira formal, a não acertar questões simples de representação.

Em vista disso, planejamos então uma investigação com os seguintes objetivos:

- verificar as estratégias utilizadas na indicação de frações no modelo de figuras geométricas tradicionais (divisões explícitas);
- verificar a aceitação ou não, entre os alunos, de divisões em partes desiguais como ilustrações de frações;
- verificar a competência dos alunos para realizar análises das relações parte-todo, em detrimento da utilização simples do procedimento de dupla contagem das partes, ultrapassando assim os limites das divisões explicitamente identificadas em figuras simples.

---

parceiro da relação didática vai ter que administrar e que será, de maneira ou de outra, responsável perante o outro. Ver G. Brousseau (1986), Fondements et Méthodes de Didactique des Mathématiques, RDM, vol 7.2

- identificar frações equivalentes quando as divisões das figuras não mostram explicitamente todos os cortes.

B – INVESTIGAÇÃO EMPÍRICA

METODOLOGIA

Sujeitos – Participaram deste estudo 55 estudantes de quinta série da rede particular de ensino, na faixa etária de 10 a 12 anos. Estes alunos responderam individualmente ao teste diagnóstico, por escrito, em aplicações coletivas em sala de aula. Destas crianças, foram selecionadas 13 para posteriores entrevistas individuais ou em dupla.

Procedimento

- O teste compreende dez questões. Neste trabalho, analisaremos somente cinco (questões 1, 2, 3, 4 e 8) que estão reproduzidas abaixo.

Nessas questões foram apresentadas três tipos de situação:

(1) no modelo geométrico tradicional – figuras comuns representando o inteiro dividido em partes iguais, com todos os traços da divisão visíveis (questões 1 e 2).

(2) no modelo geométrico tradicional e figuras não comuns – figuras simples com todos os traços de divisão explícitos, em que as partes pintadas estão separadas (questões 1c, 1d, 2a, 2d, 8b e 8c)

(3) no modelo geométrico "não tradicional" – figuras comuns divididas em partes desiguais, em que não estão explícitos todos os cortes que produziriam a divisão em partes iguais (questões 2c, 3, 4, 8a e 8d)

1) Escreva abaixo de cada figura a fração que ela representa:

a) b) (c) (d)

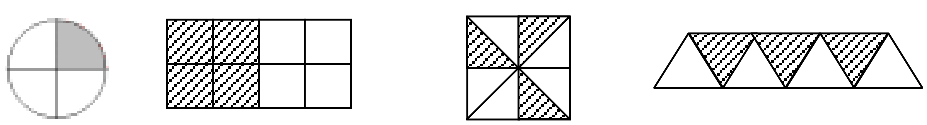
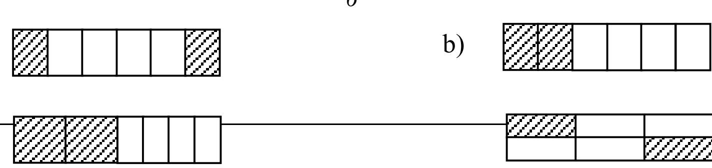


Figura 1 – Questão 1 do teste

2) Quais das frações abaixo representa $\frac{2}{6}$?

a) b)



c) d)

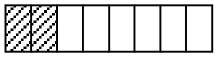
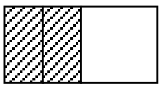
e) 

Figura 2 – Questão 2 do Teste

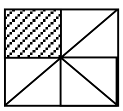
3) A parte pintada da figura representa quais frações?



a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{1}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{4}$ f) $\frac{1}{3}$ g) nenhuma das alternativas

Figura 3 – Questão 3 do Teste

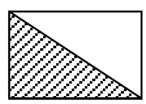
4) A parte pintada da figura representa as frações:



a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{6}$ d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{2}{8}$ f) $\frac{2}{7}$ g) $\frac{1}{8}$ h) nenhuma das alternativas

Figura 4 – Questão 2 do Teste

8) Quais frações são equivalentes a esta? 

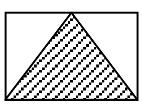
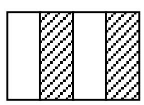
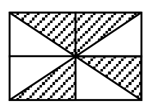
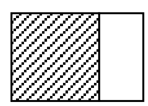
a)  b)  c)  d)  e) n.d.a.

Figura 5 – Questão 8 do Teste

O objetivo é verificar o tipo de representação adotada pelo aluno, ou seja, que estratégias ele está usando para a sua contagem e até que ponto a divisão do inteiro de forma diferente da usual interfere na sua compreensão da representação escrita e geométrica, e se dentro dessas novas circunstâncias, a equivalência aparece nas duas representações.

A nossa hipótese é que, ao passar das questões do tipo 1a e 1b para as do tipo 1c, 1d, 2, 3, 4, e 8, os alunos percam a referência de contagem e mudem de estratégia ou a mantenham, não identificando corretamente a fração. Em ambos os casos a relação de equivalência não aconteceria.

Com a questão 8, em especial, queremos confirmar se a percepção da equivalência na forma geométrica em modelos não tradicionais realmente acontece. Acreditamos que não, pois os alunos não trabalham com a área das figuras e sim com a contagem das partes.

- Para as entrevistas – os alunos foram selecionados a partir das respostas apresentadas no teste, levando em conta os diferentes tipos de erros apresentados, formando os seguintes grupos:

(1) Grupo que não transfere o conhecimento de fração do modelo geométrico tradicional para o "não tradicional" – alunos que utilizam adequadamente a linguagem de frações mas, apresentam dificuldades em transferir essa linguagem para modelos geométricos com partes desiguais.

(2) Grupo coerente com a estratégia parte-parte – alunos que usam sempre a representação parte-parte.

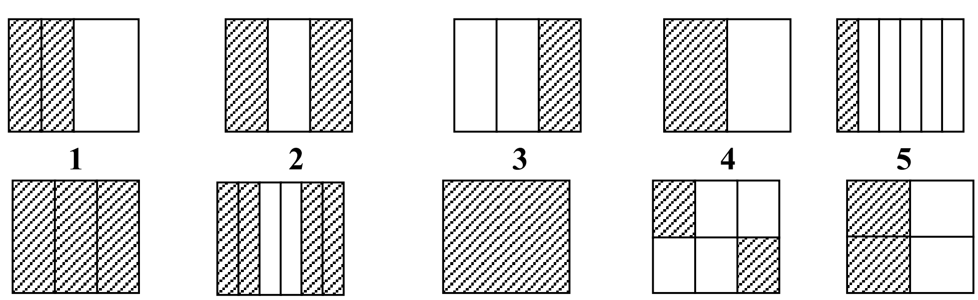
(3) Grupo incoerente na escolha da estratégia – alunos que ora usam um tipo de representação e ora usam outro.

(4) Grupo que acertou todo o teste – apenas um aluno.

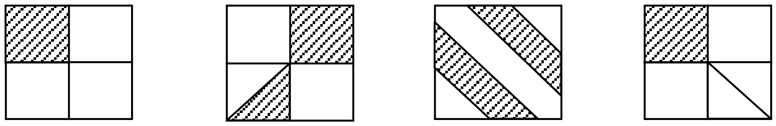
Após essa seleção, as entrevistas, num total de 8, foram aplicadas em dois alunos individualmente e em 6 duplas. Estas entrevistas possuem as seguintes características:

- entrevistas 1, 3, 6 e 7 – alunos do grupo (1);
- entrevistas 2 e 8 – alunos dos grupos (1) e (2);
- entrevista 4 – alunos dos grupos (1) e (3);
- entrevista 5 – alunos dos grupos (3) e (4).

Com o objetivo de confirmar os resultados do teste, apresentamos na entrevista seis questões. Destas, analisaremos neste trabalho, somente a questão 2. Nela, solicitamos ao aluno que faça correspondências entre os cartões da figura 6, que representam figuras de frações, com as fichas da figura 7, que representam as frações escritas simbolicamente.



6 7 8 9 10



11 12 13 14

Figura 6 – Cartões da Questão 2 da Entrevista

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{1}$	1	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Figura 7 – Fichas da Questão 2 da Entrevista

Para facilitar a análise, agrupamos os cartões da seguinte maneira:

(G1) Modelo geométrico tradicional: Cartões: 2, 3, 5, 7, 9 e 11.

(G2) Modelo geométrico “não tradicional”: Cartões: 12 e 14.

(G3) Equivalências: Cartões: 1, 4 e 10 (da fração 1/2) e, 6 e 8 (do inteiro).

(G4) Fração de difícil identificação: Cartão: 13.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Observando o desempenho dos alunos nos testes e entrevistas, dividiremos nossa análise em três partes: na primeira, os tipos de estratégias apresentadas no modelo tradicional; na segunda parte, uma comparação do desempenho dos alunos frente a figuras não tradicionais e na terceira analisaremos a equivalência de frações em ambos os modelos.

1. ESTRATÉGIAS NO MODELO GEOMÉTRICO TRADICIONAL

A fim de identificar as estratégias utilizadas pelos alunos na representação da fração em figuras onde todos os traços da divisão aparecem no desenho, analisaremos a questão 1 do teste.

As possíveis estratégias para esta questão são:

- a contagem aplicada a parte pintada e ao inteiro levando à identificação correta ou à inversão da fração;
- a contagem separada das partes pintadas e não pintadas – parte/parte

A tabela 1 mostra a porcentagem do total de alunos que responderam corretamente essa questão.

Tabela 1: Total de Acertos da Questão 1						
Questões	1a	1b	1c	1d	1a e 1b	1c e 1d
%	83,6	78,2	85,5	74,5	83	74

Observamos que a representação escrita não foi influenciada pelo fato das partes pintadas estarem separadas, essa variável não implicou em alteração significativa nos resultados.

Na questão 1, todos os alunos consideraram a quantidade das partes pintadas para o numerador ou denominador da fração, deixando o outro elemento como sendo a quantidade de partes do inteiro ou das partes não pintadas, confirmando que essa regra de contrato didático fica bem sedimentada. Nenhum aluno considerou a fração como a relação entre a parte não pintada e o todo.

A maioria dos alunos utilizou a estratégia de contagem parte/parte (ver tabela 2) e além disso verificamos que 11,3% deles foram coerentes, permanecendo com essa estratégia durante todo o teste.

Tabela 2: Porcentagem de respostas em que o aluno utiliza a estratégia parte/parte				
Questões	1a	1b	1c	1d
Respostas	1/3	4/4	3/5	3/4
%	14,8	11,3	11,3	20,4

Uma análise qualitativa dessa questão mostra que a dupla contagem das partes é muito forte para as crianças, elas sabem que devem contar duas vezes, mas não é claro o que devem contar e o que essa contagem significa. Assim, associam erroneamente ao numerador as partes pintadas e ao denominador as partes não pintadas. Isso mostra também que elas perdem a noção do inteiro com esse procedimento.

Para melhor ilustrar os argumentos por eles utilizados, na discussão do cartão 13, transcreveremos uma parte da entrevista (4) com o aluno J (11 anos), que no teste apresentou acertos e erros alternados, considerando ora partes pintadas para as não pintadas ora o contrário, e o aluno L (12 anos), que apresentou no teste erros sistemáticos, considerando sempre a parte pintada para a não pintada.[5]

J: Fração costuma ser dividida em partes iguais.
L: Deixa eu ver ... é 1/5, um inteiro dividido em 5 partes.
J: Tá errado, é 2/3, tá dividido em cinco, mas tá pintado 2.

2. ESTRATÉGIAS NO MODELO GEOMÉTRICO NÃO-TRADICIONAL

Nesta seção nos deteremos em observar a interferência que a explicitação ou não de todos os traços na divisão do inteiro causa nas respostas das crianças.

A tabela 3 mostra a porcentagem total de acertos da questão 1 do teste e do grupo (G1) da entrevista, que abordam questões envolvendo o modelo tradicional, e a porcentagem do total de alunos que acertaram as questões 3 e 4 do teste e do grupo (G2) da entrevista, que abordam questões no modelo não-tradicional.

Tabela 3: Porcentagem total de acertos das questões do teste e da entrevista					
Questões	1	G1	3	4	G2
%	65,5	95,8	23,7	18,2	25

Podemos perceber que a porcentagem de acertos das questões 3 e 4 é menor comparada com a questão 1, o mesmo acontecendo com os grupos (G1) e (G2) da entrevista.

Isso nos leva a pensar que o processo da dupla contagem das partes garante o acerto apenas nas representações no modelo tradicional, e que essa estratégia se mantém mesmo quando o referencial é alterado para o modelo “não tradicional”. Isto faz com que o erro apareça, mostrando que a criança desenvolveu somente a linguagem das frações (ela sabe contar e dar um nome para as figuras) e também que essa representação não tem o significado que deveria ter: uma parte de um inteiro representada por um número fracionário.

Esse fato se confirma a partir da observação de que 52,7% dos sujeitos marcam para a questão 3 a fração 2/3 e 56,3% marcam para a questão 4 a fração 1/7, sendo que 42,3% (22 alunos) são coerentes com a estratégia escolhida nas duas questões do teste. Além disso, quando comparamos o desempenho dos alunos nas questões 1a e 4 do teste, verificamos

[5] Usaremos as iniciais dos nomes dos alunos para identificá-los e E para identificar o entrevistador.

que 49% responderam 1/4 para a questão 1a e 1/7 para a questão 4. E mais, 36,4 % (20 alunos) assinalaram as alternativas a, b, c, d para a questão 2 e 2/3 para a questão 3.

Logo, se a criança não analisa as relações parte/todo, ultrapassando os limites de divisões explicitamente identificadas nas figuras, acaba não dando importância a igualdade das partes, valorizando exageradamente o traço das divisões, em detrimento à igualdade das partes. É o que mostramos na questão 4 em que a falta do traço da divisão é mais forte do que a percepção visual do 1/4, que esperávamos fosse imediata.

Na entrevista (8) realizada em dupla, com os alunos S (11 anos) que acertou 2 questões no teste usando sempre a estratégia parte/todo sem se preocupar com o tamanho das partes (tinha a linguagem de frações) e R (12 anos) que não acertou nenhuma questão do teste usando sempre como estratégia a parte pintada para a não pintada (parte/parte), aparece bem a incerteza que esse processo provoca.

No início dessa entrevista, os alunos exemplificaram fração a partir da divisão de um queijo em 4 partes que "*pegando*" uma seria a fração 1/4, sem citarem a igualdade das partes. Na questão 2, dividiram as fichas e depois discutiram. Percebemos que R confirmou a estratégia usada no teste (parte/parte). Para o cartão 9, por exemplo, ele associa a fração 2/4. O aluno S também confirmou sua postura, não se preocupando com a igualdade das partes. Por exemplo, para o cartão 14, este aluno associa a ficha 1/5 e para o 13, associa a fração 2/5 sem discussão.

Veja trecho dessa entrevista, após os alunos terem discutido e associado ao cartão (1) as frações 2/3 e 1/2:

E: Como é que eu posso por então frações diferentes? Ou, elas são iguais e só o número que muda?
S: Só o número que muda.
E: Ah! Então 2/3 e 1/2 vale a mesma coisa?
S: Vale...
E: Você teria alguma coisa pra falar pra ele, pra justificar porque vale?
S: Aqui tá dividido em 2, aqui tá dividido em 3. Mas, oh, aqui tá dividido na metade e aqui na metade, então vale o mesmo. (Comparando os cartões 1 e 4.)
E: O problema todo é isso daqui, esse risco nesse cartão. Se eu tirasse esse risco aqui?
S: Aí podia, aí as duas figuras ia ser igual, se tirar esse risco aqui as 2 figuras ia ser igual.

3. EQUIVALÊNCIA

A fim de investigar a compreensão de equivalência, utilizamos quatro questões do teste (questões 2, 3, 4 e 8) e a questão 2 da entrevista.

Tabela 4: Porcentagem total de acertos nas questões do teste[6]				
Questões	2	3	4	8
%	30,9	5,5	5,5	5,5

Apesar da tabela 4 indicar a mesma porcentagem de acertos para as questões 3, 4 e 8, apenas 2 alunos (3,6%) acertaram totalmente as três questões, percebendo todas as equivalências apresentadas.

A questão 2 exige que o aluno relacione a representação simbólica da fração com a representação geométrica correspondente, e ainda, perceba a equivalência nas figuras geométricas dadas, com todos os traços de divisão.

As questões 3 e 4 exigem do aluno a correspondência inversa da questão anterior, ou seja, relacionar o geométrico ao simbólico, sendo que as figuras apresentadas não trazem explicitamente todos os traços da divisão do inteiro.

A única questão do teste em que aparece a expressão "equivalente" no enunciado é a questão 8, onde é exigido que a criança perceba a equivalência entre figuras, o que só é possível quando se considera a área (o "tamanho") da parte pintada nas comparações e a dupla contagem aí não funciona.

Como nesta secção o nosso objetivo é verificar se os alunos percebem as diversas representações para uma mesma fração, independente do tipo de representação, consideramos corretas, na tabela 4, somente as respostas com todas as equivalências.

Nessa questão 12,7% (7 alunos) assinalaram a alternativa (e) mostrando que não percebem nenhuma relação entre as figuras apresentadas e 54,5% dos alunos (30) assinalaram a alternativa (d) mostrando que não possuem percepção visual da metade, que julgávamos forte, e também não se preocupam com a área que está hachurada. Por outro lado, fica claro a sua preocupação com a contagem, pois apenas consideram que nas duas figuras têm uma parte pintada e uma parte não pintada.

A entrevista (3) foi realizada com o aluno T de 10 anos que no teste apresentou uma média de respostas corretas razoável (54%), mas não percebeu as equivalências. Durante a entrevista para a questão 2, separou os cartões 1, 12, 13 e 14 porque não estavam divididos em partes iguais, não eram frações para ele. Quanto ao cartão 8, nos disse que podia ser 1 ou 1/1 pois o denominador indica a divisão e como é 1 significa que não foi dividido. Para o cartão 6, associa a fração 3/3 e não pode ser 1 ou 1/1 pois está dividido, com o traço é outra fração e tem que ser associada a outro número.

Abaixo um trecho dessa entrevista:

T: Essa aqui não é nada. Só se fizer uma linha aqui (referindo-se ao cartão 1)
E: Se eu fizer uma divisão aqui, como é que fica?
T: 2/4. Se eu fizer uma linha aqui fica 2/4.
E: Sem a linha não é 2/4?
T: Não.
E: E essa daqui? (referindo-se ao cartão 6)
T: O que tem ele?
E: Você falou pra mim que é 3/3. Não tá todo pintado?
T: Tá, só que tem as divisões, então dividido por 3 é 3/3. Têm três partes.
E: Não é igual a esse? (referindo-se ao cartão 8).
T: Não. Aqui é uma só.

O modelo parte-todo somente com figuras tradicionais desenvolve fundamentalmente a linguagem de frações, pois permite a identificação a partir da contagem. Perguntamos: existe alguma relação entre o uso correto da linguagem de frações e o reconhecimento da equivalência? A resposta é não, e se confirma quando percebemos que apesar de 46 alunos terem identificado a questão (1a) corretamente (1/4), o mesmo não aconteceu na questão 4, onde apenas 3 percebem a equivalência entre 1/4 e 2/8 e além disso, o significado de 1/4 de uma figura qualquer não está clara para essas crianças, pois na questão 4 também temos 1/4 da figura pintada e somente os mesmos a identificaram como tal.

Quando o trabalho é baseado no modelo parte-todo, as representações geométricas representam áreas (quantidades contínuas) exigindo discussão e comparação de "tamanho" e "formas", o que não ocorre na dupla contagem. A comparação é facilitada ou fica implicita nesse modelo, dada a constante apresentação de figuras igualmente divididas.

Uma outra discussão necessária é o fato de que na questão 2 do teste, 6 crianças fizeram somente uma opção de resposta e o restante optou por mais de uma representação. Destas 17 assinalaram as alternativas corretas, o que nos leva a concluir que quando apresentamos uma representação simbólica como 2/6, elas conseguem encontrar várias maneiras de desenhar essa fração. A passagem da representação simbólica para a

[6] Foram consideradas corretas somente as respostas com todas as equivalências.

geométrica está acontecendo e a equivalência surge geometricamente.

Por outro lado, na questão 3, 49 crianças assinalaram somente uma resposta, o que sugere que para cada figura só temos um nome. Aqui, os traços de divisão na figura são muito significativos e determinam a identificação da mesma, dificultando a associação dessa figura a uma classe de frações equivalente. Isto foi sistematicamente confirmado nas entrevistas.

C – CONCLUSÃO

As observações aqui relatadas indicam a necessidade de uma maior atenção ao ensino dos números fracionários. M. Clements & G. Delcampo (1988) afirmam que *"é discutível que o conhecimento de fração não é "natural", no sentido que ele não é adquirido intuitivamente: antes, ele é imposto para as crianças pelo processo de educação"*.

Acreditamos no entanto, que é de responsabilidade da escola o conhecimento de frações que os alunos adquirem, pois intuitivamente ele não se desenvolve plenamente, é primordial que se discuta os resultados que esse ensino está alcançando. Ora, nossas observações mostram que o modelo parte-todo associado à simples dupla contagem gera um conhecimento muito relativo ou local.

Kieren (1988) mostra a fragilidade do modelo parte/todo quando afirma que essa metodologia induz ao processo de dupla contagem e não introduz a criança no campo dos quocientes. Essa forma de ensino faz com que a criança desenvolva no modelo geométrico um processo de dupla contagem para aprender a linguagem de frações. Os alunos aprendem que devem contar o número total de partes em que foi dividido o inteiro e usar esse número como o denominador e que devem contar o número de partes pintadas na figura e usá-lo para o numerador da fração. No entanto, os alunos provavelmente não compreendem porque esse novo número não pertence ao conjuntos dos inteiros, visto que estão sempre contando a quantidade de partes. Eles não relacionam esses dois inteiros, pois a interpretação de quociente não lhes é apresentada e com isso a relação entre numerador e denominador fica perdida, não se desenvolvendo a idéia de número fracionário representando também uma quantidade.

Hart (1981) também levanta algumas dificuldades com as interpretações de frações, principalmente no que se refere à representação simbólica. Ela afirma que a fração é vista como dois números inteiros não relacionados, o que ficou ratificado em nossas entrevistas.

Claramente, a dupla contagem é um processo que leva ao desenvolvimento da linguagem de fração a partir da enumeração das partes e não à construção do conceito de fração nos seus diferentes aspectos, isto é, a criança não percebe essa representação simbólica nem como número fracionário, nem como representante de uma quantidade.

Quanto ao conceito de equivalência, salientamos dois pontos principais para seu desenvolvimento:

- a exigência, no modelo parte/todo, de uma abordagem do conceito de fração por meio de uma discussão das áreas de figuras geométricas, o que implica que as crianças devam estar num estágio em que já tenham desenvolvido a conservação de áreas;
- a exigência da compreensão da fração representando divisão e portanto devem ser percebidas como quocientes, o que leva a considerar as partes da figura iguais. A dupla contagem não é quociente, é apenas uma representação lida como um número que vai em cima e um outro número que vai embaixo.

Alertamos então que, tanto o primeiro ponto – equivalência de áreas (independente do modelo geométrico), como o segundo – fração como quociente, ficam implícitos em um acordo entre professor e aluno – *"Eu te apresento a figura com todas as partes iguais e você só conta"*. A propósito, numa entrevista, um dos alunos comenta: *"Fração costuma ser dividida em partes iguais"*. Devido a essa regra do contrato, não existe contra-exemplos ou situações que gerem desequilíbrios capazes de proporcionar um aprendizado significativo do conceito de equivalência.

Como para a criança "ser equivalente" é diferente de "ser igual", o emprego da metodologia da dupla contagem não favorece o entendimento de que frações podem ser iguais, mesmo que seus termos sejam diferentes e também que as frações de uma classe representam a mesma quantidade. Assim, a criança não desenvolve o significado de um número fracionário: o que a impossibilita desenvolver a lógica necessária para a percepção da equivalência.

BIBLIOGRAFIA

Artigue, M. (1988), Epistémologie et Didactique. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, volume 9, n° 3, pp. 281-308. Grenoble: La Pensée Sauvage Ed.

Behr, M. Lesh et al (1983), Rational-Number Concepts. *In Acquisition of Mathematics Concepts and Processses,* p. 91-128. New York: R. Lesh e M. Landau Editions.

Caraça, Bento de Jesus (1984), *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Portugal: Livraria Sá da Costa Editora.

Carraher, Terezinha Nunes (1988), *Aprender Pensando: Contribuição da Psicologia Cognitiva para a Educação.* São Paulo: Editora Vozes.

Carraher, Terezinha Nunes (1983), *O Método Clínico: Usando os Exames de Piaget.* São Paulo: Editora Vozes.

Clements, M. A. e Delcampo, G. (1988), *How Natural is Fraction Knowledge?*, Documento apresentado no 6° ICME – International Congress on Mathematical Education, Budapest.

Douady, R. (1988), Ingénierie Didactique, In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, volume 1, número 1, Grenoble: La Pensée Sauvage Ed.

Hart, K. (1981), *Children's Understanding of Mathematics*, Chapter 5, pp 66-81, London; John Murray.

Kerslake, D. (1986), Fractions: Childresn's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project, Windsor: NFER – Nelson.

Kieren, T.E. (1988), Personnal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development, In *Numbers concepts and operations in the middle grades*, J. Hiebert e M. Behr (eds), pp. 162-181.

Miguel, A. e Miorim, M. A. (1996), *O Ensino de Matemática no Primeiro Grau*. São Paulo: Atual Editora.

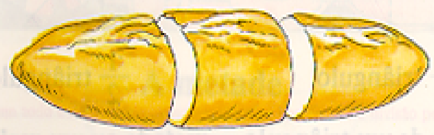
Nunes, Terezinha (1996), *Crianças Fazendo Matemática*. São Paulo: Artes Médicas.

ANEXO 1

Um terço

Objetivo: Identificar a terça parte de um todo e relacioná-la à divisão por 3 e ao numeral que a representa.

Observe:



Dividimos um pão (1 unidade) em 3 partes iguais.
Cada uma dessas partes é **um terço** de pão.

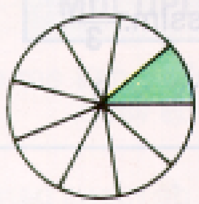
Um terço ou a **terça parte** é cada uma das partes de um inteiro dividido em 3 partes iguais.

Um terço ou a **terça parte** representa-se assim:

$\frac{1}{3}$ Lê-se: "**um terço**".

Note que o pão tem 3 pedaços iguais a $\frac{1}{3}$, isto é, 3 terços.

Figura 1 (ref. p. 2)



O inteiro foi dividido em **9** partes. A parte colorida corresponde a $\frac{1}{9}$.

Lê-se: **um nono**.

Em uma fração o algarismo abaixo do traço chama-se **denominador**. O denominador indica em quantas partes o inteiro foi dividido. O algarismo acima do traço chama-se **numerador** e indica quantas partes foram consideradas do inteiro.

Exemplo: $\frac{1}{9}$ $\begin{matrix} \rightarrow \textbf{numerador} \\ \rightarrow \textbf{denominador} \end{matrix}$

Figura 2 (ref. p. 2)

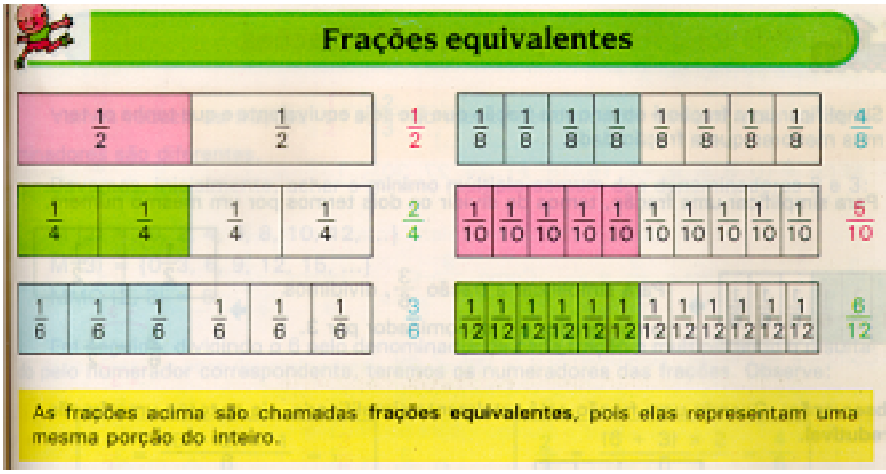


Figura 3 (ref. p. 3)