

## BOLTZMANN E A MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA NO SÉCULO XIX

Educação Matemática – GT 19  
Katya Margareth Aurani (UNINOVE)

Muito se tem discutido sobre a relação entre Matemática e Física. Qual é o papel da Matemática quando utilizada na Física?

O estudo da História da Ciência pode contribuir para o debate dessa questão . Assim pretendemos discuti-la a partir do trabalho do físico austríaco Ludwig Boltzmann , no século XIX.

Boltzmann é conhecido por suas investigações sobre as relações entre a Termodinâmica , a Mecânica e o atomismo.

Teria ele tratado a Termodinâmica como uma disciplina derivada da Mecânica , enquanto tentava descrever o movimento dos átomos? Como a matemática teria sido utilizada para obter uma aproximação do movimento atômico?

Nossa análise dos trabalhos de Boltzmann sobre a 2ª Lei da Termodinâmica (Aurani,1992) , mostra que Boltzmann não usou a Matemática e a Termodinâmica para criar uma aproximação do movimento atômico. Ele usou a Termodinâmica como uma disciplina fundamental e independente da Mecânica, para dar um significado físico às grandezas do movimento do átomo. Assim, ele usou a igualdade da média das velocidades do átomo com a temperatura , para que a velocidade do átomo adquirisse um sentido físico.

Boltzmann usou a distribuição de velocidades de Maxwell<sup>1</sup> , que dava o nº de partículas cuja velocidade têm um certo valor , para relacioná-la com a fração de tempo que uma única partícula mantém um dado estado. Para tanto , teve de fazer uma hipótese ,que levou à definição da hipótese ergódica pelos Ehrenfest.(Aurani,1992p.133)

A hipótese feita por Boltzmann:

---

<sup>1</sup> Boltzmann utilizou a distribuição de Maxwell na seguinte forma:  $4 \cdot \sqrt{\frac{h^3}{\pi}} \cdot N e^{-hv^2} v^2 dv$  , onde N é o número de partículas , v é a velocidade, e h é uma constante que depende da temperatura. Essa expressão dá segundo Boltzmann o número de partículas com velocidade entre v e v+dv.( Aurani,1992p.110)

Boltzmann diz que é possível utilizar a distribuição de Maxwell<sup>1</sup> em relação à distribuição de velocidades de uma única partícula, desde que as partículas passem por todos os estados compatíveis com a energia das partículas:

*A grande irregularidade do movimento do calor, e a multiplicidade das forças que atuam sobre o corpo do exterior, torna provável que os átomos, em razão do movimento que nós chamamos de calor, passem por todas as posições e velocidade possíveis, compatíveis com a expressão das forças vivas...* (Aurani,1992p.130).

A objeção de Paul e Tatiana Ehrenfest é que não seria possível que o corpo passe por todos os estados compatíveis com a energia. Mas nesse caso, seria possível considerar que as partículas passem tão próximo quanto se queira de todos os estados compatíveis com a energia. A primeira hipótese dá origem à discussão da existência de sistemas ergódicos<sup>2</sup>, e a segunda dá origem à existência dos sistemas quase-ergódicos.(Aurani,1992p.133) As pesquisas sobre a existência desses sistemas tiveram prolongamentos na Ciência após Boltzmann.

O infinito segundo Boltzmann:

A objeção dos Ehrenfest não se coloca do ponto de vista de Boltzmann. Podemos entender melhor essa questão analisando o sentido que o “infinito” tem para ele.

Em um dos artigos mais conhecidos de Boltzmann sobre a 2ª Lei da Termodinâmica, ele menciona sua concepção do infinito na Física. Ele diz:

*...quando pensamos que o infinito na natureza nada mais significa do que a superação de um limite, podemos compreender a variedade infinita das velocidades que cada uma das moléculas pode ter como um caso limite, que se realiza quando qualquer uma das moléculas pode ter cada vez mais valores de velocidade.* (Aurani,1992p.13)

A idéia de Boltzmann sobre o infinito ganha então um significado físico na natureza. Está relacionada à variedade de valores possíveis na velocidade das partículas, devido às colisões. Entretanto, essa idéia de infinito não supõe a continuidade das funções. Não se trata de dividir a matéria infinitamente, pois nesse caso suporíamos que as funções seriam contínuas. Trata-se de que qualquer velocidade possa ter um infinidade de valores. Assim, para Boltzmann, na medida em que o infinito adquire sentido físico, ele poderia

---

<sup>2</sup> Do grego “ergon” = trabalho, no sentido da energia; “hodos” = caminhos (Aurani,1992p.133)

possibilitar a matematização da descontinuidade no tratamento do movimento das partículas.

De fato, a idéia de que o infinito se relaciona à idéia atomista sobre a existência de limites na divisibilidade da matéria, explicitada por Maxwell:

*...e a teoria enuncia ainda que não há nada na natureza das coisas que poderia impedir esse processo de divisão de ser repetido mais uma vez e de novo, sem fim. É a doutrina da divisão infinita da matéria, e ela está em contradição com a teoria dos átomos. Os atomistas dizem que após um certo número de tais divisões as partes não serão mais divisíveis, porque cada uma delas seria um átomo.* (Aurani, 1992p.140)

Esses limites de divisibilidade, postos em evidência por Maxwell, são mais fundamentais no pensamento de Boltzmann. Não é somente o limite da divisibilidade, mas todos os limites físicos são concebidos por ele como “um infinito na natureza”. O infinito tem então um sentido físico para Boltzmann que o vincula à imposição de um limite.

Segundo R. Dugas, o infinito para Boltzmann é uma abstração, elaborada do a partir do real que é finito. Nossa objeção é que para Boltzmann, o infinito é tão real quanto o finito: os dois existem ao mesmo tempo e são ligados fisicamente pelos átomos e seu movimento irregular. Isso permitiu a ele estabelecer uma coerência entre a continuidade das grandezas macroscópicas características do estado do corpo, e a descontinuidade das variáveis existentes no movimento microscópico. (Aurani, 1992p.138)

O fato de ser finitista significa pois que Boltzmann procura os limites da natureza sem supor a continuidade, pois a divisibilidade também tem seus limites. É desse modo que ele pode por exemplo definir o tempo de permanência no estado do corpo  $dt^3$ , seja em relação ao movimento de um ponto material em função de  $dx dy$ , seja em relação à irregularidade dos movimentos microscópicos. Ele considera infinita a variedade dos valores possíveis das coordenadas nos dois casos, o que, segundo sua idéia de infinito justifica a existência de uma grandeza macroscópica ligada ao movimento atômico, a qual nesse caso seria o tempo de permanência em um estado.

---

<sup>3</sup> A expressão achada por Boltzmann é:  $dt = \frac{e^{-hE} dx_1 dy_1 \dots dz_1 du_1 dv \dots dw_r}{\iint \dots e^{-hE} dx_1 dy_1 \dots dw_r}$ , onde

$$E = X + \sum \frac{mv^2}{2} \text{ e } m \text{ é a massa do átomo, } v \text{ é sua velocidade, e } X \text{ é uma função potencial.}$$

Desse modo, quando Boltzmann diz que pode-se utilizar para um gás, a expressão  $dt$  que ele tinha achado para o movimento de um ponto material no plano (Aurani, 1992p.142), ele estava tratando de uma representação nova dos estados do corpo. Mais precisamente, ele estabelece uma ponte entre a representação espacial do movimento dos pontos materiais na Mecânica e a irregularidade do movimento atômico, encaminhando-se já para o desenvolvimento de uma representação espacial do estado do corpo.

A expressão de  $dt$  permite estabelecer uma relação formal entre o estado do corpo caracterizado pelos pontos materiais e o tempo. Quando ele se pergunta sobre o tempo de permanência em uma região do espaço, ele tenta encontrar uma maneira de representar o estado do corpo no espaço. Boltzmann utiliza os pontos materiais da Mecânica para construir uma representação da Termodinâmica no espaço. Ele se questionava então sobre o movimento dos pontos materiais no espaço, para definir um espaço de representação dos estados termodinâmicos no tempo.

Assim, o que é importante no argumento de Boltzmann, não é que o corpo deve passar por todos os estados compatíveis com a energia, mas que ele passa por qualquer estado compatível com a energia, devido à irregularidade do movimento das partículas. Isso justifica, segundo sua idéia de infinito, a passagem da irregularidade microscópica às grandezas macroscópicas contínuas, características do estado do corpo.

É com essa idéia de infinito que Boltzmann faz a matematização da irregularidade microscópica. Ele utiliza criticamente o limite matemático, na medida em que ele faz a passagem das variáveis do movimento dos átomos às variáveis de estado sem supor a continuidade das primeiras. Essa passagem está condicionada à existência de grandezas físicas que caracterizam o equilíbrio térmico. A aplicação da matemática não se faz independentemente das grandezas termodinâmicas. Podemos então dizer que a matematização feita por Boltzmann se fundamenta sobre a Termodinâmica como ciência fundamental.

Em suas pesquisas sobre a 2ª lei, Boltzmann efetua de fato um tratamento teórico dos limites na natureza, sem a hipótese de continuidade. Quando ele fala do infinito na natureza como uma passagem ao limite, ele estabelece uma coerência entre os limites físicos do macroscópio e a matematização da discontinuidade microscópica. Nessa coerência, a 2ª lei era importante para impor os limites ao movimento do átomo.

Conclusão:

Boltzmann investigou a matematização do movimento do átomo se fundamentando no significado físico das grandezas mecânicas e termodinâmicas . O infinito é então a infinidade das velocidades dos átomos de um gás, de maneira que se possa estabelecer a matematização do movimento atômico, sem supor a continuidade dessas funções. Boltzmann dá mais um passo na matematização da descontinuidade e da descrição da irregularidade do movimento atômico .A hipótese que ele faz para relacionar o movimento irregular atômico ao tempo de permanência de um corpo em um dado estado , levou à definição da hipótese ergódica , e à polêmica em torno da existência de sistema quase-ergódicos . Estes aparecem como uma boa aproximação para o sistema ergódico , no caso da inexistência deste último.

Referência bibliográfica:

AURANI, Katya Margareth . **La nature e le rôle des probabilités dans les première recherches de Boltzmann sur la deuxième loi de la thermodynamique( les articles de 1866,1871, 1872 et de 1877).**Tese de doutorado apresentada à Universidade de Paris7. Paris,1992.

Esquema do pôster: 10 páginas de tamanho 215mm x 300mm

