CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: DO ALGEBRISMO ÀS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

GT-19
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
AUTOR: OSWALDO LUIZ COBRA GUIMARÃES (FAENQUIL)

INTRODUÇÃO

O Cálculo é uma das grandes realizações da humanidade, cujas idéias básicas foram desenvolvidas há cerca de 300 anos por Newton e Leibniz e, desde então, vem sendo utilizado nas mais diversas áreas das Ciências. É utilizado e ensinado em função de sua capacidade de reduzir problemas complexos das diversas áreas das Ciências a regras e procedimentos simples. Em função deste aspecto redutor, é possível abordá-lo como um conjunto de regras e procedimentos, aplicáveis mecanicamente em situações puramente algébricas.Nesta linha de ação metodológica, freqüentemente utilizada no Cálculo, com enfoque algébrico, o aluno executa exercícios sobre limites, derivadas e integrais, na maioria das vezes, semelhantes e, portanto, repetitivos. Normalmente, o professor pede-lhes a resolução de listas de exercícios que apenas reforçam o estudo e a aprendizagem de um comportamento matemático algébrico. Estimula-se a aprendizagem pela repetição de procedimentos, levando o aluno a considerar que “domina a matéria” ao fazer e refazer longas seqüências de cálculos e que é incompetente quando simplesmente erra uma operação algébrica.

A disciplina é apresentada em muitas instituições de ensino sob a forma clássica, nunca fugindo do modelo dado por definições, propriedades, exercícios puramente algébricos, aplicações "fechadas" ou poucas aplicações dos conceitos matemáticos ligados ao cotidiano ou à realidade profissional do aluno e com abordagens isoladas, visto que, ou se adota um método gráfico, ou um método algébrico, ou uma abordagem numérica, mas raramente ocorrem as três abordagens de maneira simultânea, método proposto neste trabalho.

D'Ambrosio (1996, p.95) afirma que a remoção do caráter experimental da Matemática do ensino é um dos fatores que mais contribuem para a queda do rendimento escolar.

Fainguelernt (1999, p.82) realça que resultados de diversas pesquisas nacionais e internacionais em Educação Matemática revelam que, de um modo geral, a maneira pela qual a Matemática vem sendo ensinada é automatizada e descontextualizada, e que o aluno executa ações rotineiras, sendo desvalorizado o desenvolvimento do raciocínio e da intuição matemática.

Moysés (1997, p.67) afirma que “Se professor e alunos defrontam-se com sentenças, regras e símbolos matemáticos sem que nenhum deles consiga dar sentido e significado a tal simbologia, então a escola continua a negar ao aluno, uma das formas essenciais de ler, interpretar e explicar o mundo. O importante é que o aluno, ao chegar a utilizar notações simbólicas, compreenda a sua razão de ser.”

Comumente, os alunos são bombardeados unicamente com exercícios baseados em palavras-chaves, tais como: calcule, determine, obtenha, resolva, derive, integre. Tal prática leva o aluno a uma preocupação única em obter números que nada trazem de significados físicos ou matemático-conceituais.

A proposta é que a disciplina Cálculo Diferencial e Integral Computacional utilize softwares matemáticos como ferramentas de resolução de problemas, além de ambientes de investigação e generalização de conceitos. Por ser desenvolvida com apoio de ambiente computacional a disciplina proposta valariza e exige a utilização de representações múltiplas, e, desta forma, onde for possível, o professor deve incentivar os alunos a analisarem os problemas em contextos multirepresentados.

UMA EVIDÊNCIA DO PROBLEMA

Baldino (1995, p.9) considera que a maioria dos alunos reduzem os conceitos aos algoritmos, quando por exemplo se lhes pede para que seja calculada a derivada de $\int_a^x \sqrt[4]{t^2+1}\,dt$, a maioria deles, primeiro, se empenha em longos esforços para calcular uma primitiva. Isto mostra que o foco do aluno está para desenvolvimentos algébricos e não para o entendimento dos conceitos e aplicações.

AMBIENTES COMPUTACIONAIS PARA CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O uso dos softwares matemáticos agiliza processos algébricos, e por exemplo, pode proporcionar atividades de reflexão, como mudanças de parâmetros das funções, além de permitir visualização gráfica. Podem proporcionar um ambiente de investigação por parte dos alunos, e não simplesmente uma forma ágil de obter respostas.

O uso de softwares como Derive e Graphmatica possui a característica pela qual, através de manipulação de parâmetros, os alunos podem experimentar, ter a sensação de interação com o problema estudado. O software matemático utilizado nas etapas de modelagem matemática amplia e abre novas vias de exploração através da representação da informação sob muitas formas (gráficos, tabelas, expressões algébricas e números). Esta importância ocorre sobretudo nas fases de aperfeiçoamento e validação dos modelos, pela facilidade da variação de parâmetros e na generalização de comportamento funcional.

Softwares como MatLab ou Maple são mais abrangentes pois além de possuírem ferramentas do Cálculo também são ambientes de programação. Ao manipularem linguagens de programação os alunos também trabalham com o pensamento lógico, através da estruturação dos algoritmos e fortalecem os conceitos teóricos da disciplina envolvidos em tais algoritmos. Ao escrever programas no ambiente informatizado, ressalta-se que uma das etapas mais produtivas do processo é a análise dos erros, que podem ocorrer no levantamento dos dados, no modelo matemático construído, na estrutura lógica do programa ou até mesmo nos conceitos matemáticos envolvidos, conduzindo o aluno a um contínuo processo de análise das etapas que compõem o processo de resolução de um dado exercício ou modelo.

Os computadores quando utilizados de modo correto podem trazer muitos benefícios para o processo ensino/aprendizagem através da modelagem:

- A utilização de simulações em computadores aproxima a matemática da realidade e os exemplos dados em aula não são mais artificiais ou tão abstratos;
- A ênfase no ensino pode ser centrada na modelagem e na exploração dos conceitos, os algebrismos são efetuados pelas máquinas;
- Computador proporciona fácil visualização geométrica dos modelos através de softwares com interfaces gráficas;
- Podem ser utilizadas para conferir resultados e quando se tratar de programação ainda são um reforço para o conteúdo estudado;
- Também desenvolvem a capacidade lógica do aluno para estruturar algoritmos;
- Integram a parte numérica e gráfica à teoria da disciplina;
- aluno terá uma formação mais abrangente.

O tratamento algébrico dado ao longo dos anos nos cursos de Cálculo em muitas situações não priorizou tratamentos gráficos e ou numéricos (tabelares) em função das dificuldades que estes métodos gerariam em sala de aula, visto a ausência de equipamentos e programas adequados a este estudo e, portanto, a conseqüente dificuldade no tratamento dos problemas que envolvessem tal análise. Porém, atualmente, o computador com programas com interfaces "amigáveis" e possuidor de inúmeros recursos gráficos, numéricos e algébricos, assume o papel de facilitador de tarefas, trazendo uma flexibilidade no tratamento de dados aos alunos e professores e proporcionando a possibilidade de representações múltiplas de um mesmo problema.

A QUESTÃO DAS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

Borba (1994, p. 83) afirma “talvez usar representações múltiplas em educação matemática não seja novidade ” mas que, de maneira geral, essas representações auxiliares, gráficos e tabelas, são normalmente colocadas de lado para que se concentre em expressões algébricas. Confrey, Smith e Dennis (apud. Borba, 1994, p.83) argumentam que “O papel predominantemente e “isolacionista” da Álgebra na educação matemática ajuda a afastar vários estudantes da matemática à medida que eles não conseguem associar significados desenvolvidos por eles em outros contextos a essas expressões algébricas”.

Borba (1994, p.83) considera também que alguns softwares, citando como exemplo o aplicativo Function Probe, possibilitam a utilização de representações múltiplas com facilidades iguais, e dão a chance de tanto estudante, como professor desenvolverem atividades onde a Álgebra não seja predominante.

Borba & Penteado (2001, p.30) concluem que o conhecimento sobre funções matemáticas significa coordenar múltiplas representações e que esta abordagem “ganha força” em ambientes gráficos que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas. Tal opinião em relação ao conhecimento sobre funções matemáticas é fundamental para o Cálculo, visto que o mesmo aborda estudo quantitativo de funções matemáticas.

Em relação à disciplina Cálculo Diferencial e Integral, ocorreu, ao longo dos anos, uma supervalorização do desenvolvimento algébrico em detrimento de outros desenvolvimentos matemáticos (gráfico e numérico).

O tratamento numérico pode proporcionar ao Cálculo, por exemplo em relação ao problema de áreas abaixo de uma curva, um caráter geométrico, mais acessível ao entendimento do aluno, pois não envolve conceitos abstratos de limites e sim conceitos reais, mais próximos aos alunos, de áreas de figuras geométricas conhecidas. O uso de limites para a abordagem do problema sob a forma de uma Integral, ou soma de Riemann, pode, a partir desta introdução ao problema, através de uma forma geométrica ou gráfica, ser posteriormente abordado, agora com um sentimento geométrico e numérico muito mais familiar ao aluno.

O tratamento “tabelar” dos assuntos do Cálculo proporciona um referencial ao aluno das soluções aproximadas, muito próximas da disciplina Métodos Numéricos que é vista no terceiro e no quarto semestre dos cursos de Engenharia. Neste sentido Biembengut (1995, p.57) possui uma proposta de integrar as duas disciplinas, na qual sugere a utilização da calculadora gráfica durante todo o processo. A idéia pode ser ampliada também para o uso de computadores em função das potencialidades gráfica, numérica e algébrica de ambientes informatizados como Modellus, Graphmatic, Derive e MatLab, entre outros.

É importante observar ao aluno que representações numéricas, algébricas e gráficas se complementam, que são formas diferentes de análise de uma mesma situação. Como exemplo, citamos a análise da função $\lim_{x \to 0} \text{sen}(\frac{\pi}{x})$. Tal atividade pode levar o aluno a associar o conceito da inexistência de limites em pontos com comportamentos indefinidamente oscilatórios, sem convergência a um valor "final", neste exemplo, na tendência de valores de "x" ao ponto zero. As conjecturas numéricas freqüentemente efetuadas pelos alunos levam a crer que, no entanto, este comportamento numérico tende a zero.

A análise algébrico-trigonométrica leva ao fato que $f(1/n) = sin(n\pi) = 0$ para todos os valores inteiros de "n". Desta forma, a tendência natural do aluno é "se aproximar" numéricamente do "zero" por valores do tipo:

f(0,1)=sen(10π)=0

f(0,01)=sen(100π)=0

f(0,001)=sen(1000π)=0

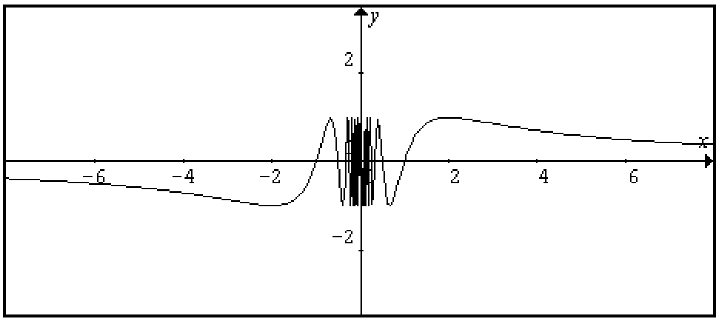
Esta tendência numérica levaria o aluno a uma análise pela qual o valor do limite seria zero, de forma errônea, como podem mostrar as análises algébrica, numérica e gráfica:

A análise algébrica-trigonométrica também revela que sen(π/x)=1 para infinitos valores de x que tendem a zero, ou seja, $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Para valores de x dados por $x = \frac{2}{4n+1}$. Portanto, a função, nas proximidades da origem do sistema de coordenadas, adquire valores, por infinitas vezes o valor f(x)=1.

A mesma análise pode ser feita para valores $\frac{\pi}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, o que levaria a valores de função f(x)= -1 para $x = \frac{2}{4n+3}$. Através desta análise, o aluno verificaria as infinitas oscilações e associaria ao objeto matemático, limite, a imagem de sua inexistência matemático-comportamental em valores próximos à origem, para esta função.

Esta análise pode ser complementada através de uma ambiente gráfico, fornecendo o aspecto visual ao comportamento da função:

Comportamento da função y=seno(π/x)



Nesta situação o comportamento oscilatório visualizado pelo gráfico mostra a não existência do limite, não ocorrendo a tendência a um comportamento "final" da função quando a variável independente tende a um valor específico.

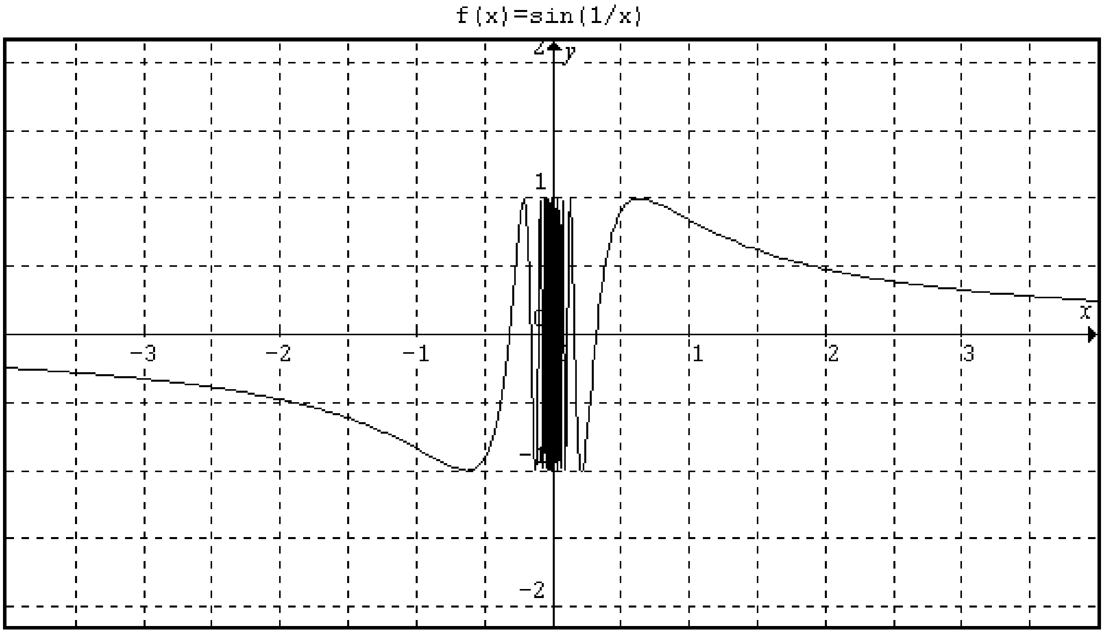
Na teoria de limites (Stewart, 1999, p. 108) freqüentemente é utilizado o Teorema do Confronto que afirma:

"Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de *a* (exceto possivelmente em *a*) e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ então $\lim_{x \to a} g(x) = L$ ".

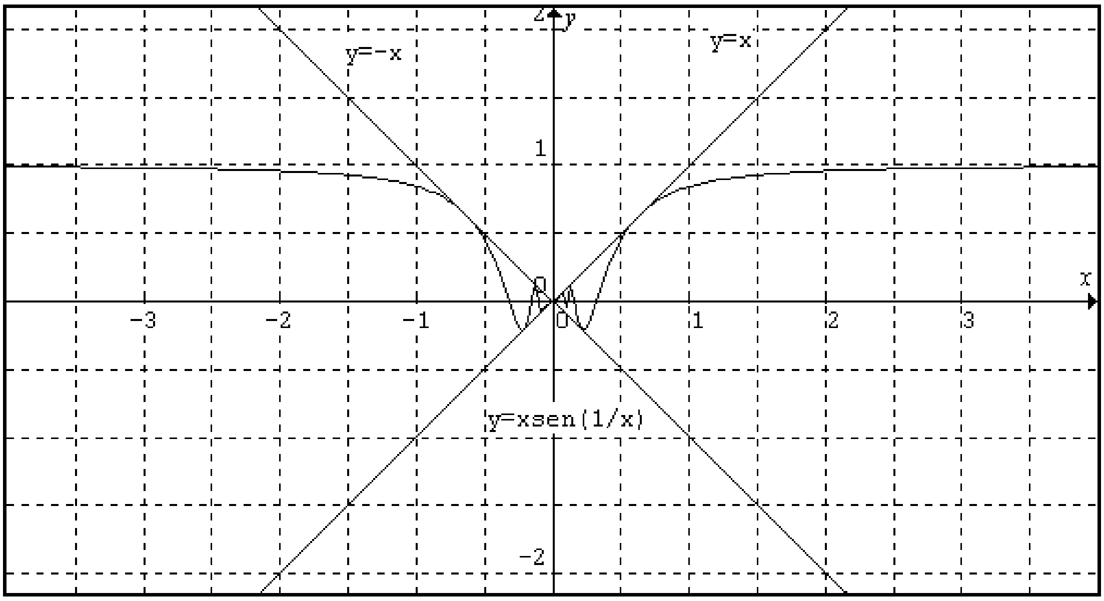
A análise gráfica em conjunto com a algébrica pode proporcionar um perfeito entendimento de algumas situações. Para exemplificar vejamos a determinação do limite da função g(x)=xsin(1/x) quando a variável independente tende a zero, e uma possível estratégia adotada pelos alunos para resolução deste problema.

A seqüência algébrica conduziria o aluno a aplicar as leis de limites e desta forma $\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = [0.\infty]$, o que levaria a um produto indeterminado.

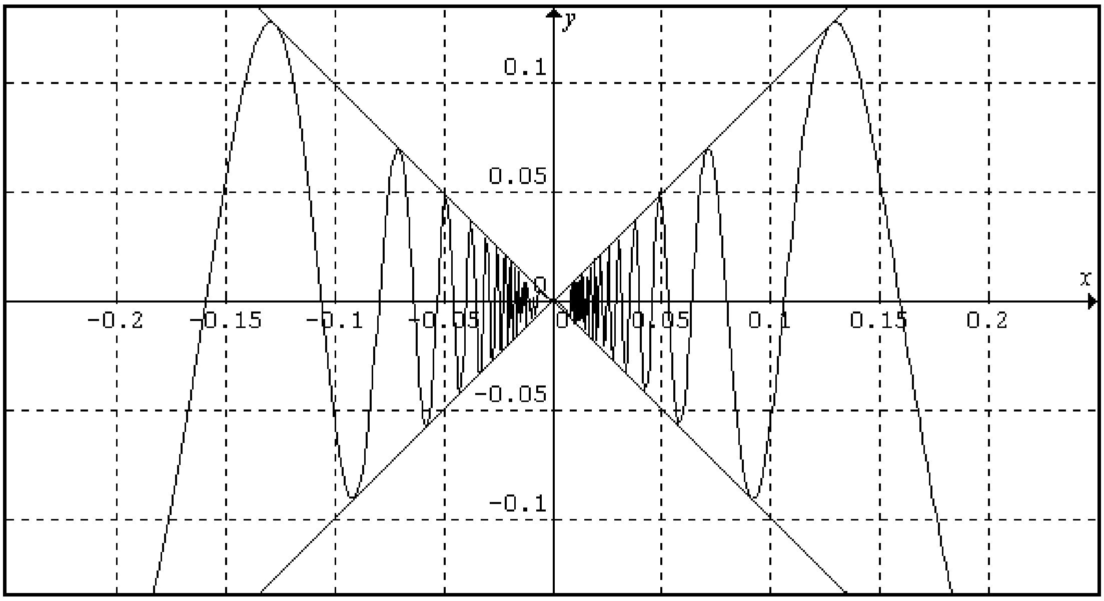
A partir de um ambiente informatizado pode ser obtido o gráfico de w(x)= sin(1/x), que é parte da função original f(x) e visualizado que w(x) oscila indefinidamente entre -1 e 1. quando x tende a zero. Portanto a função f(x)= xsin(1/x) oscila indefinidamente entre -x e x e pelo Teorema do Confronto $-x \leq x\text{sen}\frac{1}{x} \leq x$. Como, por analogia com o Teorema do Confronto f(x)=-x e h(x)=x, temos que f(x) e h(x) tendem a zero quando x tende a zero, e portanto , $\lim_{x \to 0} x\,\text{sen}\frac{1}{x} = 0$, o que pode ser confirmado pelas análises gráficas:



Visualização do Teorema do Confronto para f(x)=xsen(1/x)



"Zoom" demonstrando o comportamento da função f(x)=xsen(1/x)



A UTILIZAÇÃO DE AMBIENTES INFORMATIZADOS

Em relação ao uso de ambientes informatizados, não devemos buscar em nossos alunos apenas a capacidade de realizar tarefas, que sem dúvida nenhuma seriam resolvidas mais rapidamente e acertadamente pelos computadores. Ao se basear o ensino na exposição de longos algebrismos, não perde-se um tempo precioso que poderia ser destinado à teoria e à aplicação.

A proposta de trabalho não deve-se reduzir a uma proposta tecnicista de que apenas deve ser utilizada a informática no Cálculo, porque os computadores estão por toda a parte e por certo deveriam estar no ensino de Cálculo. Seria apenas a mudança de um instrumento, do quadro-negro para a tela de um computador, do lápis para um teclado ou mouse.

Palis (1995, p.25) cita a opinião de Hughes-Hallet, quando afirma que " Os problemas fundamentais em nossos cursos de Cálculo não são de tecnologia(...) são mais profundos e amplos do que estar defasados em relação à tecnologia(...) uma conspiração não explicitada entre nós e os alunos removeu a maior parte, se não de todo, do pensamento matemático de nossos cursos de Cálculo."

Não trata-se apenas de se implantar a informática nos cursos de Cálculo. O problema é estabelecer uma metodologia de ensino-aprendizagem baseada neste ambiente. O que se discute e que deve ser realçada é a diversidade de possibilidades que o computador oferece em relação a um ambiente de aprendizagem de Cálculo.

O processo de inserção dos ambientes informatizados em relação ao Cálculo é de dificuldade acentuada, visto que, os professores não criam situações onde o Cálculo poderia ser conceituado em tais ambientes. Não é apenas uma questão de fazer e sim como fazer. Como utilizar a informática de modo que o aluno reflita e conceitue?

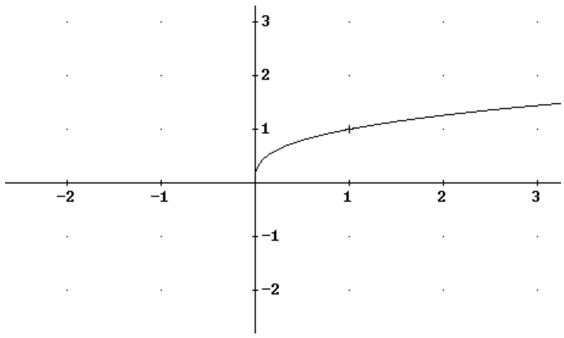
Em relação à utilização de softwares matemáticos é quase inexpressiva a produção de livros de Cálculo que valorizem situações de aprendizagem que envolvam ambientes informatizados. Livros clássicos utilizados em cursos de Cálculo como Guidorizzi, Leithold, Swokowsky não abrangem situações de uso de ambientes informatizados. Em particular, nesta proposta de trabalho, como fonte bibliográfica foram utilizados os livros Cálculo e Aplicações de Hughes-Hallet, Cálculo de James Stewart, Calculo-Um novo horizonte de Howard, os quais já apresentam muitas situações de uso de ambientes informatizados, constituindo-se em excelente referência para professores que queiram associar softwares matemáticos ao Cálculo.

A utilização de softwares pode levar a resultados desastrosos, caso o aluno não possua os conhecimentos matemáticos necessários ao estudo de uma determinada função. Os alunos podem fazer inferências incorretas baseados em alguns objetos em telas de computador mais facilmente do que apoiados nos objetos análogos produzidos à mão, pois o ato de gerar os objetos e operar com eles com lápis e papel pode ajudar a evitar certos erros. Neste sentido, pode ser esboçado no papel o comportamento total de uma função, com raízes, pontos críticos, intervalos de crescimento, assíntotas, etc, sem a necessidade do uso de uma escala. O software necessariamente trabalha com uma escala padrão (que pode ser alterada) e freqüentemente precisa-se de várias janelas de visualização para se ter uma visão completa do comportamento da função. O próximo item aborda situações em que as respostas dos softwares podem levar à análises errôneas por parte dos alunos.

Foi proposto aos alunos que utilizassem os programas Derive e Graphmatica e que plotassem o gráfico da função $y = \sqrt[3]{x}$. A idéia era provocar um “erro gráfico” e que este erro provocasse processos de reflexão quanto a conjuntos domínio e imagem da função.

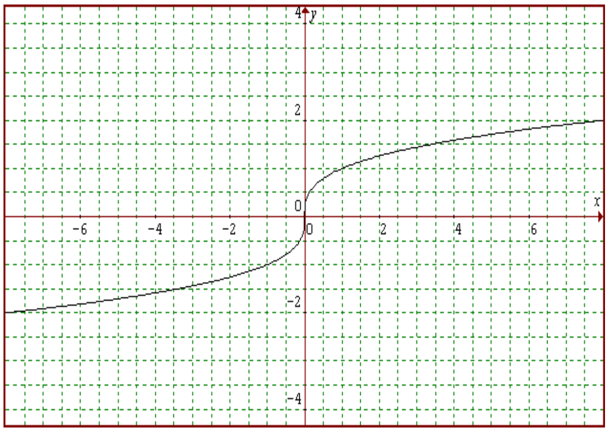
Alguns softwares matemáticos (neste caso, foi utilizado o ambiente algébrico-gráfico Derive) dispõem a imagem abaixo:

Comportamento de $y = \sqrt[3]{x}$ no software Derive



Outros (utilizado, neste caso, o Graphmatica) dispõem a imagem correta:

Comportamento de $y = \sqrt[3]{x}$ no Graphmatica



Solicitamos aos alunos que comparassem os dois gráficos e que verificassem qual gráfico era o "correto. Alguns alunos executaram operações algébricas com a função no campo negativo e concluíram que "não havia problema nenhum, nenhum problema que invalidasse a função em relação à valores à esquerda do zero". Nesta etapa, evidenciou-se o poder do ambiente gráfico quanto à variação de parâmetros e à facilidade de escrever a mesma função sob formas algébricas diferentes.

O aluno Mauro, que fazia novamente a disciplina, criou uma nova forma para a função, a saber: f(x)=(x . |x| $^{(1/3)}$)/ |x|)., chegando ao gráfico completo da função original.

Outro aluno escreveu a função original como y=e$^{\ln(x)}$, mesmo antes que o assunto funções inversas fosse efetivamente abordado em aula, já demonstrando este conhecimento.

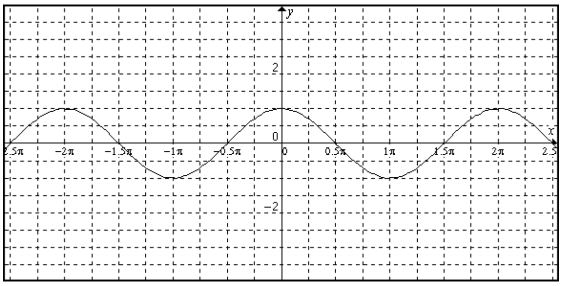
Uma das possibilidades de uso de ambientes informatizados é a utilização dos erros, de comparações entre os resultados de vários softwares, em atitudes de reflexão com conceitos já adquiridos pelos alunos e, portanto, reconstruídos e aplicados em situações abstratas, porém, reais na tela de um computador.

Foi discutido com os alunos o fato de que em alguns ambientes a função é computada como $e^{(1/3)\ln x}$, e ln x não está definido para x<0. Logo, somente a metade do gráfico é produzida.

O aluno deve estar atento aos resultados obtidos através dos softwares, aliando seu conhecimento matemático à praticidade e potencialidade do programa computacional. No caso em questão, a reflexão deveria ser em relação ao domínio da função, de tal forma analisada a questão seria verificado que para valores de x negativos não existiria nenhuma restrição para raízes cúbicas.

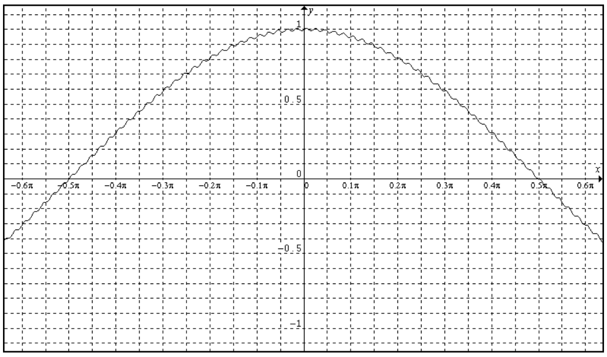
Outro exemplo de visualização incorreta do comportamento de uma função foi estudado a partir do gráfico de f(x)=cos(x) +(1/100)sen(100x) e foi solicitado aos alunos a discussão do comportamento da função.

f(x)=cos(x) +(1/100)sen(100x)



O aluno Marcio observou que o gráfico deveria parecer-se muito com o gráfico da função seno, talvez acrescido de algumas oscilações, mas outro aluno observou que este comportamento não é resultado apresentado pelo software. Para vermos mais claramente a forma das oscilações acrescidas na função utilizamos o recurso do “zoom”.

"zoom" em f(x)=cos(x) +(1/100)sen(100x)



A reflexão feita pelo aluno deveria ser da ordem: a razão para este comportamento está no fato de que o segundo termo (1/100)sen(100x) , é muito pequeno em comparação com o primeiro cos(x). Desta forma, precisávamos de outra janela visualizando a função mais de perto, para vermos a verdadeira natureza da função. Ao fazer tal análise os alunos refletiram sobre amplitudes e freqüências de funções trigonométricas, podendo alterar os parâmetros que influenciam a amplitude e freqüência, bem como criar ângulos de fase em suas funções trigonométricas.

Ao proporcionar uma atividade desta natureza o professor faz com que o aluno reflita em relação a valores máximos e mínimos de uma função, aos valores de amplitude de funções e proporciona a ele um visão de comportamentos predominantes sobre partes de funções e sobre família de funções. Pode-se proporcionar aos alunos, análises tabelares e gráficos, por exemplo, do comportamento intervalar de predominância de funções exponenciais e polinomiais, ou funções logarítmicas e polinomiais.

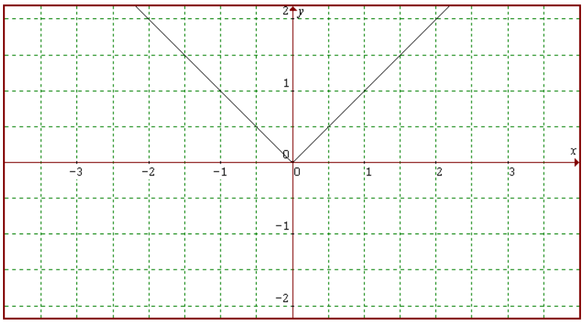
Outra situação interessante que pode ser realizada no curso de Cálculo é o estudo em ambientes informatizados de funções não diferenciáveis num dado ponto, como a função y=|x|, que não admite derivada em x=0.

Exercícios de diferenciabilidade dados em aula normalmente seguem a seqüência:

- nomea-se a função
- pede-se para fazer um esboço do gráfico
- verifica-se através de limites se a função é contínua ou não num dado ponto.
- Verifica-se através de limites também a diferenciabilidade.

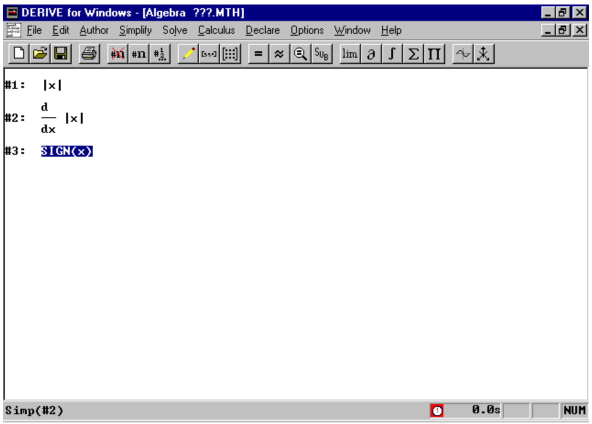
O uso do software para a função y=|x| produziu o gráfico abaixo:

y=|x| no software Graphmatica



A utilização do software Derive, em termos algébricos, acerca da derivada para x=0 produziu:

Utilização do software Derive para y=|x|



Durante a utilização do software Graphmatica para o Cálculo desta derivada, surgiu a resposta que a função não é diferenciável, como realmente não o é. Neste ponto, a discussão iniciou-se. Foi questionado por um aluno: "Como dois softwares apresentam respostas finais totalmente diferentes a respeito de uma mesma função?".

A função sgn(x), lê-se sinal de x, é definida da seguinte forma:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

A função modular y=|x|, unilateral à esquerdade do de x=0 vale –1 e a derivada unilateral à direita de x=0 vale 1, confundindo-se com o comportamento da função sgn(x) armazenado na biblioteca de funções do programa e desta forma o software Derive apresenta um resultado "incorreto".

Em ambientes informatizados ou não, o que acontece é que, quando os alunos encontram dificuldades para analisar este problema da diferenciabilidade em um ponto, verifica-se que o conceito imagem do objeto matemático derivada não foi obtido pelo aluno, ou obtido de forma incompleta. Caso o conceito da diferenciabilidade tivesse sido construído pelo aluno, a sua reflexão levaria às condições que torna uma função diferenciável num ponto, levaria à noção de derivadas como limites e, o próprio comportamento gráfico da função no ponto x=0, com inclinações de retas diferentes à esquerda e à direita do ponto x=0, levaria ao resultado correto de que a função não é diferenciável para x=0. Apresentava-se uma situação em que a análise dos resultados dos softwares levava a processos de reflexão sobre os objetos matemáticos envolvidos.Em relação ao exemplo da função modular, o aluno pôde encontrar diversas tangentes, portanto criou objetos “concretos”, com inúmeras inclinações, no mesmo ponto zero de abscissa. Visualmente, ele experimentou que estas tangentes tinham inclinações diferentes e, portanto, limites definidores da derivada diferentes, à esquerda e à direita do mesmo ponto zero de abscissa, invalidando o conceito de limite bilateral, visto que a derivada é um limite bilateral. As situações descritas mostram um método de ensino-aprendizagem no qual o erro provoca os processos de reflexão matemática, fortalecendo os conceitos na tentativa de encontrar o porquê da incompatibilidade entre os resultados apresentados pelo ambiente informatizado e os resultados esperados. Mesmo em função da praticidade de obtenção de rápidas respostas evidenciou-se a necessidade de conhecimentos matemáticos necessários à análise dos problemas.

CONCLUSÃO

Este artigo aponta para uma linha metodológica na qual o algebrismo não seja a única maneira de representação dos problemas do Cálculo Diferencial e Integral e tal proposta passa pela inserção do método das representações múltiplas, no qual quando possível os problemas devem ser abordados em contextos algébricos, gráficos e numéricos. A possibilidade de estratégias multirepresentadas possibilita uma leitura mais completa dos problemas e só é possível com a inserção de softwares matemáticos como ambientes de investigação matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Fainguelernt, E.K., Educação Matemática Representação e Construção em Geometria, Editora Artes Médicas, 1999.
- D'Ambrosio, U., Educação Matemática da Teoria à Prática, Editora Papirus, 1996.
- Moysés, L.; Aplicações de Vygotsky à educação matemática, Editora Papirus,1997.
- Baldino, R. R., Desenvolvimento de Essências de Cálculo Infinitesimal, volume 4, Série Reflexão em Educação Matemática, MEM/USU, 1998.
- Borba, M. C., Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Idéias Matemáticas, Boletim da Educação Matemática, ano 9- Especial nº 3, pag. 83-102, 1994.
- Borba, M.C., Penteado,M.G., Informática e educação matemática, Coleção tendências em educação matemática, Autêntica Editora, 2001.
- Biembengut, M. S., Revista Temas e Debates, Ano VIII- nº6, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1995.
- Stewart, J. , Cálculo Volume I, Editora Pioneira, 1999.
- Palis, Temas e Debates Ano VII, nº 6, Sociedade Brasileira de Educação Matemática- O Ensino de Cálculo, 1995.