O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DO PROFESSOR: FORMAÇÃO E PRÁTICA DOCENTE NA ESCOLA BÁSICA

MOREIRA, Plínio Cavalcanti - UFMG

DAVID, Maria Manuela Martins Soares - UFMG

GT: Educação Matemática /n.19

Agência Financiadora: Não contou com financiamento.

1. Introdução

Uma das questões recorrentes nos debates sobre a formação de professores através da licenciatura é a falta de uma articulação adequada entre a formação específica e a formação pedagógica, tendo em vista a futura prática profissional na educação básica (Ludke, 1994; Pereira, 2000; Fiorentini et al., 2002). Essa questão é histórica e nasce junto com a licenciatura e seu modelo inicial, o “3+1”. Nos anos 80, são incorporadas ao currículo do curso as chamadas disciplinas integradoras, caracterizando-se, então, um novo modelo formado por blocos de disciplinas (específicas, pedagógicas e integradoras) que, nos seus traços gerais, permanece até hoje. Há um reconhecimento bastante generalizado na literatura, de que a introdução das disciplinas integradoras não mostrou os resultados esperados. Pode-se notar, entretanto — de modo especial ao longo da última década — certas modificações importantes nas formas de se conceber a natureza das dicotomias e desarticulações apontadas nos estudos sobre as licenciaturas.

No seu documento final, o IV Encontro Nacional da Comissão Nacional de Reformulação dos Cursos de Formação do Educador (Conarcfe-89) postulava que...

> ...as disciplinas de conteúdo específico são as mesmas para o Bacharelado e para a Licenciatura. Somente após haver um relativo domínio das questões dos conteúdos específicos e pedagógicos são introduzidas as disciplinas integradoras**.** (Conarcfe–1989, apud Souza et al., 1995, p.42).

Fica claro que a questão da integração com a prática docente na escola não se colocava como uma problemática a ser considerada no *interior* do processo de formação de “conteúdo” na licenciatura. Essa visão abre espaço para que, na prática, se mantenha a concepção de que o fazer do professor consiste fundamentalmente em *transmitir* um conteúdo absolutizado, utilizando-se, para isso, das ciências da educação. Tal concepção de prática docente vai se refletir na pesquisa sobre a formação. Fiorentini e seus colaboradores analisaram dissertações e teses sobre formação do professor de matemática, defendidas no Brasil entre 1970 e 2000, separando-as em dois grupos bem demarcados: os trabalhos realizados nas décadas de 70 e 80 — em que, segundo os autores, o conceito de formação subjacente era fundamentalmente o de *treinamento* — e os trabalhos realizados nos anos 90 em que *“supera-se o termo treinamento”* e *“inicia-se uma nova etapa na pesquisa sobre formação de professores”*. (Ferreira et al., 2000, p.265). Uma das direções para a qual aponta essa nova etapa é a da análise do processo de formação específica dentro das licenciaturas. Lüdke (1994) afirma que é preciso repensar o processo de formação inicial do professor da escola básica e as formas de articulação entre conteúdo, pedagogia e prática docente, a partir do papel fundamental da formação específica. Ela diz:

> já é tempo de se alterar a direção do eixo que vem norteando a licenciatura, fazendo-o centrar-se claramente no lado das áreas específicas. (...) Isso não implica, entretanto, que não haja uma importante contribuição da área pedagógica, cuja continuidade deve ser assegurada, mas numa articulação epistemológica diferente com as outras áreas, não numa simples relação temporal de sucessão. Deve-se partir do conteúdo específico, para trabalhar-se a dimensão pedagógica em íntima relação com ele. (Ludke, 1994, p.9)

No caso da licenciatura em Matemática, essa posição apresenta uma mudança de foco importante na medida em que inclui no debate a formação de "conteúdo", usualmente considerada parte autônoma dentro do processo geral de formação do professor.

Neste trabalho, descrevemos parte do conhecimento matemático envolvido nas questões que se colocam para o professor em sua prática docente na escola básica, confrontando-o com o conhecimento matemático veiculado na licenciatura. Nosso objetivo não é, neste estágio de investigação, propor alternativas, mas descrever *formas concretas* com que se expressa a desarticulação — reiteradamente apontada nos estudos sobre as licenciaturas, mas quase sempre em termos genéricos ou superficiais — entre a formação inicial e a prática docente. Acreditamos que uma compreensão profunda das formas concretas com que a formação matemática do licenciando se desconecta das questões que se colocam para o professor na sua prática docente, por um lado, ainda está por se desenvolver e, por outro, é condição necessária para que se possa avançar no sentido de elaboração de propostas alternativas fundamentadas e eficazes.

Nosso estudo se circunscreve ao tema "Números Naturais" e ao caso do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG. Trabalhamos com as seguintes fontes: livros didáticos escolares e livros destinados a professores do ensino básico; documentos relativos ao curso de licenciatura em Matemática da UFMG (ementas, programas e referências bibliográficas de cada uma das disciplinas); entrevistas com os professores das disciplinas do curso de licenciatura da UFMG nas quais o tema é abordado; textos utilizados como referência básica nas disciplinas do curso de licenciatura da UFMG e, finalmente, uma parte selecionada da literatura de pesquisa no campo da educação matemática. Observamos, entretanto, que, neste texto, não são exploradas exaustivamente todas essas fontes.

Duas idéias básicas orientaram o estudo:

A matemática escolar não se reduz a uma versão elementar e "didatizada" da matemática científica.

A prática profissional do professor de matemática da escola básica é uma atividade complexa, cercada de contingências e que não se reduz a uma transmissão técnica e linear de um "conteúdo" previamente definido.

A nossa visão é a de que há uma distinção profunda e importante entre *modos de conhecer* os objetos matemáticos quando se visa a formação profissional para o trabalho de pesquisa na fronteira da teoria matemática ou quando, sob outra perspectiva, o objetivo é a formação profissional para o trabalho educativo no processo de escolarização básica.

O trabalho se desenvolve, portanto, a partir de uma concepção de matemática escolar que ultrapassa tanto a idéia de transposição didática (Chevallard, 1991), regulada pela matemática científica e pelas ciências da educação, quanto a de uma construção fundamentalmente endógena à escola (Chervel, 1990). Para nós, a matemática escolar se constitui a partir de disputas que se desenvolvem no plano das prescrições curriculares, mas resulta, em última instância, do processo através do qual a prática escolar, a partir de sua lógica e de seus condicionantes, opera sobre as prescrições. Esse processo envolve elementos de produção, retradução, seleção, adaptação e também de *carência* de saberes (Shulman, 1987; Fiorentini et al., 1999; Tardif, 2002).

2. O conjunto dos números naturais: conhecimentos da formação e prática docente na escola básica

As idéias fundamentais que vão se desenvolver até a formação do conceito de número natural começam a ser elaboradas muito cedo pelas crianças, a partir, principalmente, de atividades associadas à contagem e à ordenação de objetos (Dickson et al.1993, p.169-188; Sinclair and Sinclair, 1986, p.62-67). As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de naturais também têm, em geral, significados fortemente associados a uma diversidade de questões da "vida cotidiana".

Embora uma discussão aprofundada dos processos de aquisição, pela criança, dos conceitos relativos às quatro operações com os números naturais (Carpenter e Moser, 1983; Fuson, 1992; Greer, 1992) seja, talvez, mais adequada a um curso de formação de professores para as séries iniciais, o processo de formação matemática num curso de licenciatura, ao desconsiderar algumas questões referentes aos significados e propriedades dessas operações, aos algoritmos correspondentes e ao sistema de numeração decimal, remete a outras instâncias de formação profissional a discussão de questões fundamentais da matemática escolar.

Ainda que o licenciado em matemática, de um modo geral, não trabalhe com alunos das quatro séries iniciais do ensino fundamental, acreditamos que a separação acentuada existente entre a formação do docente desse ciclo e a do professor que leciona nas outros ciclos do ensino básico é equivocada, pois pode contribuir para intensificar a descontinuidade do processo de transição das séries iniciais para a quinta série e seguintes. Isso, por si só, já coloca uma demanda no sentido de que o licenciado conheça a matemática que é trabalhada nas séries iniciais.

O fato mais importante, no entanto, é que o professor de matemática da escola básica, a partir da quinta série, estará retomando e ampliando todo o trabalho com os números naturais, feito nas séries iniciais, considerando esses números, agora, como elementos de um conjunto (que, por exemplo, contém a soma e o produto de quaisquer dois deles, mas não contém, sempre, a diferença ou a divisão), promovendo a percepção de relações entre eles (números primos e compostos, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, etc.) e, eventualmente, estendendo — num processo pedagógico extremamente complexo — as operações, seus significados e suas propriedades, para os inteiros negativos, para os racionais e, a partir destes, para os reais.

No desenvolvimento de cada etapa desse processo de expansão dos conjuntos numéricos, o professor terá que, por um lado, conhecer profundamente — do ponto de vista da matemática escolar — aquilo que os alunos consideram, num dado momento, como o universo numérico, e, por outro, lidar com dúvidas e concepções incorretas dos alunos, as quais vão se referir tanto ao "novo" conjunto, mais amplo, como também ao conjunto mais restrito, aquele supostamente “conhecido”, que está sendo ampliado.

Essas dúvidas e falhas conceituais que aparecem freqüentemente entre os alunos podem ser associadas a pelo menos dois aspectos do processo de aprendizagem dos sistemas numéricos, os quais tendem a se sobrepor. O primeiro aspecto refere-se ao fato — ressaltado em vários estudos, como veremos — de que, do ponto de vista da aprendizagem escolar, a aritmética dos naturais é um tema complexo cuja apreensão, em níveis considerados satisfatórios, não se esgota no processo que se desenvolve ao longo das séries iniciais. Assim, o professor terá que lidar com dificuldades nesse tema que, muitas vezes, acompanham o aluno até as séries finais do ensino fundamental.

O segundo aspecto refere-se ao processo, que se desenvolve no plano da estrutura cognitiva dos alunos, de acomodação do conhecimento “novo” e de construção de um estágio diferenciado de compreensão do conhecimento “antigo”.

Estudos como o de Margaret Brown, dentro do programa de pesquisa inglês *Concepts in Secondary Mathematics and Science — CSMS*, deixam claro que uma série de dificuldades com os números naturais que, muitas vezes, se supõem associadas apenas ao ensino de matemática nas séries iniciais, freqüentemente se manifestam até o final do ensino fundamental. Por exemplo, quando foi pedido aos alunos ingleses (em idades que corresponderiam, no Brasil, às quatro últimas séries do ensino fundamental) para escrever, em dígitos, o número quatrocentos mil e setenta e três, o índice de acerto foi baixo, como vemos em Brown (1981, p.50):

Idade	porcentagem de respostas corretas
12 anos	42%
13 anos	51%
14 anos	57%
15 anos	57%

Em outra questão, onde era pedido o valor relativo do 2 em 521400 a percentagem de respostas corretas também foi baixa, como aponta a mesma autora à p.50:

Idade	porcentagem de respostas corretas
12 anos	22%
13 anos	32%
14 anos	31%
15 anos	43%

Em outra questão ainda, em que o pedido era para fazer a conta de subtração 2312 – 547, o índice de acerto foi:

Idade	porcentagem de respostas corretas
12 anos	61%
13 anos	61%
14 anos	62%
15 anos	66% (ibid, p.50)

No livro *Children Learning Mathematics: a teachers´ guide to recent research (Dickson et al., 1993)*, as autoras analisam o sistema decimal e descrevem diferentes aspectos do conhecimento matemático subjacente à construção e uso desse sistema posicional de numeração: a noção de agrupamento, a linguagem envolvida na leitura dos números, a idéia de valor relativo do algarismo tendo em vista a sua posição (de modo especial o caso do zero), somar e subtrair mentalmente e estimar resultados das operações, decompor números ou reagrupá-los, multiplicar e dividir por potências de 10 (cada casa à esquerda vale dez vezes a anterior e cada casa à direita vale 1/10 da anterior). Observe que a distributividade do produto em relação à adição, a associatividade e a comutatividade da adição estão implícitas nos aspectos citados acima: por exemplo, 562 é igual a cinqüenta e seis dezenas mais duas unidades e também a três centenas, vinte e seis dezenas e duas unidades e, ainda, a cinco centenas e sessenta e duas unidades, etc. As autoras se referem também a uma diversidade de pesquisas empíricas que convergem para a conclusão de que o domínio do sistema decimal de numeração é um processo que se desenvolve ao longo de todo o ensino fundamental e que é um dos aspectos mais complicados da aprendizagem a respeito dos números.

Ao sintetizar a seção do livro em que discutem o assunto, elas escrevem:

> Como foi visto, existem muitas facetas no processo de compreensão do sistema posicional de numeração. Evidências sugerem que algumas das idéias envolvidas não são de fácil domínio (...) <u>Há indicações de que erros e idéias incorretas se desenvolvem tanto nas séries iniciais como nas seguintes e, de fato, o domínio desse assunto é incompleto até o final do ensino fundamental.</u>
> O ensino do sistema posicional parece ser um processo de longo prazo, não limitado a algumas aulas mas demandando uma progressão cuidadosamente planejada por um longo período de tempo. (Dickson et al., 1993, p.221, grifo nosso)

Em relação às propriedades das operações com os naturais, estudos indicam que, em sua prática docente na escola, o professor, não deve tomar como evidente o fato de que <u>a</u> vezes <u>b</u> resulta no mesmo valor que <u>b</u> vezes <u>a</u>. O mesmo se poderia dizer a respeito da associatividade: em situações do ensino escolar, não é óbvio que <u>a</u> vezes (bc) dê o mesmo resultado que <u>(ab)</u> vezes c. Virginia Brown, no capítulo 1 do livro "What´s happening in math class?" (Schifter, 1996), faz um interessante relato de como a questão da comutatividade do produto aparece como dúvida genuína numa sala de 3ª série e descreve como ela, como professora, pôde ajudar os alunos na construção de um entendimento fundamentado dessas propriedades.

Essa fundamentação é realmente importante tendo em vista que, muitas vezes, a criança aceita a comutatividade da adição e da multiplicação e, na falta de um entendimento significativo da questão, transfere indevidamente a mesma propriedade para a subtração e divisão. Um estudo de M. Brown detecta esse tipo de procedimento em alunos da escola secundária inglesa, num estágio que corresponderia, no Brasil, à quinta e sexta séries do ensino fundamental. Ela relata o fato de que, num problema envolvendo a divisão de dois números naturais, 36% das crianças de 12 anos deu como resposta $26 \div 286$, enquanto apenas 34% respondeu corretamente $286 \div 26$ (Brown, 1981a, p.38). A pesquisadora infere, a partir de entrevistas com alguns dos sujeitos, que a tendência geral entre os alunos que responderam na forma invertida ($26 \div 286$) era pensar que as duas alternativas eram idênticas. De todo modo, nas conclusões desse estudo, ela afirma que, no máximo, 30% dos sujeitos (alunos de 12 anos) reconheciam que a divisão não era comutativa. E destaca que os professores do ensino secundário (que corresponderia, mais ou menos, às últimas 4 séries do ensino fundamental no Brasil) cometem um grande erro quando partem do princípio de que os conceitos e idéias matemáticas relativas às operações com os naturais foram apreendidas nas séries iniciais (Brown, 1981a, p.47).

Dickson et al., por sua vez, assim se referem ao processo de aprendizagem relativo às operações com os naturais:

> Assim, como em outras áreas da matemática, o entendimento das operações com os números desenvolve-se ao longo de anos; os significados de cada uma das operações se estende gradualmente até cobrir um amplo e mais abstrato espectro de situações. Isto continua sendo verdadeiro mesmo quando os números envolvidos são números naturais pequenos, como nos casos da maioria dos estudos a que nos referimos nesta seção.
> No passado pensava-se que a criança, tendo assegurado um domínio do significado, por exemplo, da multiplicação, poderia simplesmente ir adiante e aprender métodos de cálculo mais e mais complexos. Entretanto, os resultados de pesquisa apresentados anteriormente sugerem que um cuidado explícito deve ser tomado para que a criança se familiarize gradualmente com os vários modelos associados à multiplicação e <u>que essa tarefa se estende, com certeza, para a escola secundária.</u> Um dos modos de fazer isso é através da discussão da seguinte questão: de quantas maneiras, essencialmente diferentes, uma criança pode inventar um "problema" cuja solução se expresse por uma conta do tipo 5 x 3? (Dickson et al., op. cit. p.237-238, grifo nosso)

Fica claro que uma discussão a respeito dos significados e das propriedades das operações com os naturais - de modo especial a multiplicação e a divisão - e do sistema decimal de numeração, interessa diretamente à formação matemática na licenciatura porque, na sua prática docente na escola, o professor estará lidando com alunos cujo processo de apreensão conceitual e operacional dos conhecimentos envolvidos nessas questões ainda não se completou.

Por outro lado, como já foi observado, o processo de extensão dos conjuntos numéricos que se desenvolve a partir da quinta série do ensino fundamental vai colocar para o professor da escola, em sua prática, a questão da extensão das operações com os naturais para um campo numérico mais amplo, os racionais. Num abrangente estudo das idéias envolvidas no processo escolar de expansão dos naturais até os racionais, Behr et al. comentam:

> Foi comum observar regressões significativas na compreensão dos conceitos. <u>Os conceitos já trabalhados anteriormente devem ser não só relembrados, mas integrados progressivamente a sistemas mais complexos</u>; (...) idéias que são verdadeiras em domínios restritos, podem ser enganosas, incorretas ou mesmo inúteis quando transportadas para novos domínios. (Behr et al., 1983, p.104, grifo nosso)

Vemos, assim, que o conhecimento dos significados e das propriedades das operações básicas com os números naturais, do sistema de numeração decimal e dos algoritmos associados (ver discussão sobre os algoritmos, mais adiante), se coloca como demanda efetiva da prática profissional docente na escola básica. Entretanto, em todo o seu curso, o licenciando não é exposto sistematicamente (isto é, como parte integrante da ementa ou do programa de alguma disciplina), a uma discussão sobre esse assunto. Em todas as disciplinas do curso as operações de adição e multiplicação de naturais e suas propriedades são tomadas como “fatos conhecidos”, saberes anteriores aos pontos de partida dos programas e ementas curriculares.

Uma decisão curricular dessa natureza se ajusta perfeitamente à visão que Courant e Robbins expõem logo na primeira página do primeiro capítulo de sua conhecida obra, em que procuram explicar "o que é a matemática":

> Por sorte, os matemáticos não têm que se ocupar com o aspecto filosófico da transição que proporciona a passagem de coleções de objetos concretos ao conceito abstrato de número. <u>Consideraremos, portanto, como dados, os números naturais, juntamente com as duas operações fundamentais, adição e multiplicação, mediante as quais eles podem ser combinados.</u> (Courant e Robbins, 1964, p.8, grifo nosso)

Os matemáticos, como produtores de conhecimento de fronteira, realmente não têm que se ocupar com a questão da construção do conceito de número e nem com a questão dos significados das operações elementares com os naturais. Mas o que procuramos mostrar aqui é que, num projeto de formação matemática na licenciatura, assumir a posição do matemático diante dessas questões e desenvolver o processo de formação a partir de um ponto em que o conjunto dos números naturais é considerado **dado**, juntamente com as operações de adição e multiplicação, significa furtar-se ao enfrentamento de questões postas pelas necessidades concretas da própria prática para a qual se pretende formar o profissional.

É importante observar, ainda, que uma compreensão — significativa em termos da prática docente escolar — das operações com os números naturais, não se produz, automaticamente, como resultado de um estudo deste conjunto numérico desenvolvido através de uma abordagem formal e lógico-dedutiva, em que se definem as operações, tomam-se certos fatos como "princípios" (princípio da indução, etc.) e se *demonstram*, rigorosamente, os outros fatos relacionados a essas operações (a comutatividade, a associatividade, etc).

Conhecer as operações, num sentido relevante para o ensino escolar, é muito diferente de conhecer a cadeia que estabelece a dependência lógico-formal entre as propriedades estruturais das operações, os postulados, as definições e os conceitos primitivos adotados. Pensando-se a questão em termos das necessidades da prática profissional docente na escola básica, o conhecimento do conjunto dos naturais como uma estrutura lógica axiomática não substitui — em alguns casos chega até a esconder, através de uma assepsia que elimina tudo aquilo que não é considerado estritamente "essencial" — o conhecimento dos naturais como objeto de ensino e de aprendizagem da matemática escolar. Posto de outra forma, o essencial a respeito dos números naturais, de acordo com os valores da matemática científica, nem sempre coincide com aquilo que é considerado essencial, da perspectiva da matemática escolar.

Do ponto de vista segundo o qual se desenvolve o processo de formação matemática na licenciatura, as operações com os naturais são pensadas com seus significados abstratos que se expressam, "essencialmente" através das propriedades (comutatividade, associatividade, elemento neutro etc) e se realizam com números, isto é, com objetos abstratos, já concebidos e percebidos como tais. Mas na prática docente escolar, o trabalho com as operações aritméticas básicas é, *também*, até certo estágio do desenvolvimento da criança, instrumento de apoio no processo de construção do próprio conceito abstrato de número. De fato, uma das grandes questões pedagógicas no trabalho com as operações elementares no ensino escolar é a da construção de significados para elas, isto é, o desenvolvimento da capacidade de identificação — mediante estratégias que envolvem, entre outros elementos, um certo domínio da linguagem — das situações em que uma determinada operação (e não outra) fornece a resposta correta para um dado problema (Dickson et al., 1993; Carpenter and Moser, 1983; Greer, 1992). Nesses casos, os números se referem sempre a objetos concretos e a resolução correta do problema, ao mesmo tempo em que traduz uma relação flexível com a idéia de número — uma abstração que se "concretiza" em situações determinadas — pode ser, também, mais um exercício na direção da construção dessa relação.

Sobre essa questão, mais uma vez, os estudos de Margaret Brown nos fornecem dados interessantes. Quando ela pediu a uma amostra de cerca de 500 alunos de 11 anos de idade, para inventar um "problema" cuja solução fosse dada por uma determinada "conta", a percentagem de respostas consideradas corretas foi a seguinte (Brown, 1981, p.40):

Conta:	percentagem
84 – 28	77%
9 ÷ 3	60%
84 ÷ 28	42%
9 x 3	45%
84 x 28	31%

Afora o fato de que a multiplicação tenha se mostrado mais difícil que a divisão — embora em termos da execução do algoritmo esta última seja, de modo geral, considerada mais difícil — os resultados mostram também que números "grandes" causam maiores problemas. Isso nos permite inferir que, pelo menos nestes casos, o conceito de número, associado ao processo de produção de significado para as operações, ainda não chegou ao nível de abstração em que diferenças desse tipo não mais importam.

M. Brown, em sua tese de doutorado, atribui a maior dificuldade (observada em alunos da escola <u>secundária</u>) com o significado da multiplicação e da divisão (de números <u>naturais</u>), à estrutura dessas operações (apud Dickson et al., 1993). Assim, segundo Brown, os números que são somados ou subtraídos, numa determinada situação, referem-se a objetos similares que são combinados ou dissociados. Por exemplo, para a conta 2 + 3: 2(carros) + 3(carros) = 5(carros). Nos casos da multiplicação e da divisão, no entanto, não só os objetos envolvidos são, geralmente, de tipos diferentes, como também, em cada caso, cada objeto de um tipo tem de ser associado a um correspondente conjunto de objetos de outro tipo. Por exemplo, para a conta 2 x 3: duas pessoas, a cada pessoa três carros. Quantos carros no total?

Também aqui, vê-se que a criança ainda pode se prender — de um modo pouco flexível — à grandeza concreta (carros, pessoas) a que se refere o número numa dada situação, e isso provoca dificuldades no processo de produção de significado para a operação. Nestes casos, o professor precisa lidar com o processo de construção de significados muito mais através de reiteradas "concretizações" em diferentes situações do que através de definições por indução ou de deduções formais das propriedades estruturais das operações, já que estas últimas expressam exatamente o contrário: a *identificação* de todos os significados concretos possíveis.

A divisão de números naturais é tratada apenas na disciplina Fundamentos da Álgebra Elementar, dentre todas as obrigatórias do currículo do curso de Licenciatura em Matemática. Mas é abordada num contexto em que o fundamental é a existência e unicidade do quociente e do resto. Em outras palavras, trata-se de demonstrar formalmente (isto é, a partir do princípio da boa ordem em N, ou de seu equivalente, o princípio da indução) a seguinte proposição (ver, por exemplo, Birkhoff e MacLane, 1980, p.17-18): "dados dois naturais a e b, com $b>0$, existem dois naturais q e r tais que $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Para cada par a,b dado, os naturais q e r são univocamente determinados".

Se o horizonte da disciplina é desenvolver uma percepção do conjunto dos inteiros e do conjunto dos polinômios sobre Q, R ou C como exemplos típicos e elementares da estrutura de anel euclidiano, então o "essencial", no estudo da divisão de naturais, é, realmente, o argumento da existência e unicidade referido acima. A cadeia de resultados que começa com o lema da divisão de Euclides, passa pela caracterização do máximo divisor comum de dois elementos como combinação linear deles e vai até o teorema da decomposição única em fatores primos, deve ser cuidadosamente construída para que a adaptação dos argumentos a conjuntos mais gerais — inteiros de Gauss, por exemplo, onde não se pode trabalhar com a noção de maior e menor, como nos naturais — traga à luz o máximo de generalidade com que se podem pensar essas idéias.[1] Desse modo, certas características do conjunto dos inteiros e dos polinômios são vistas como expressões concretas e particulares de uma estrutura matemática mais geral, a dos anéis euclidianos.

No entanto, para o professor da escola em sua prática docente, uma visão formal que "unifica" essas estruturas — números inteiros e polinômios sobre Q ou R — faz mais sentido como um elemento suplementar a uma abordagem específica delas em que a questão da produção de significados, no sentido escolar, para cada um dos elementos que as compõem — as operações, suas propriedades, etc. — esteja colocada e discutida. No caso dos naturais, especificamente, o professor da escola básica vai enfrentar a questão do significado das operações, do seu uso na resolução de problemas, da extensão da idéia de número e das operações correspondentes para os inteiros, racionais e reais e o problema do ensino dos algoritmos para encontrar os resultados das operações.

O uso dos algoritmos formais para as operações básicas, diferentemente do uso das calculadoras, traz à tona a questão da lógica do seu funcionamento e coloca, para o professor da escola básica, a necessidade de uma percepção clara dos princípios em que se baseia a sua justificativa, ou seja, a razão pela qual eles fornecem corretamente os resultados. Alguns estudos sugerem que muitos dos erros cometidos pelos alunos ao utilizarem os algoritmos têm origem no fato de que o estudante não entende a lógica segundo a qual o algoritmo funciona (Baroody, 1987, p.225-231; Dickson et al., 1993, p.252-269).

Em relação ao algoritmo da divisão, por exemplo, é interessante observar que, já em 1930, F. B. Knight faz o seguinte comentário ao analisar uma lista com 12 exemplos de divisão de números naturais:

---

[1] Observe-se, nesse sentido, a definição de máximo divisor comum de dois inteiros positivos: em lugar da formulação natural, mais simples, direta e descritiva que seria "o maior número que divide os dois" opta-se por outra que caracteriza o m.d.c. como o número natural d que satisfaz a duas propriedades (Birkhoff e MacLane, 1980, p.19):

a) d é um divisor comum dos números dados

b) todo divisor comum dos números dados são divisores de d

Esta última forma teria a vantagem de ser generalizável para domínios não ordenados, ao mesmo tempo em que explicitaria o "essencial" da noção.

> Do ponto de vista matemático, os exemplos são todos iguais. Todos são exemplos de divisão de naturais e isto é tudo que há para ser dito. Do ponto de vista do ensino, entretanto, existem importantes diferenças entre eles. (Knight, 1930, p.161)

E prossegue explicitando algumas das diferenças entre os 12 casos apresentados: um contém dificuldades do tipo “vai 1” em alguma das multiplicações que aparecem no processo de execução do algoritmo, em outro caso aparece o dígito zero “no meio” do quociente, outro, ainda, apresenta dificuldades para o aluno no momento de estimar o valor do primeiro dígito do quociente, etc.

Considerando-se, hoje em dia, o uso mais ou menos generalizado das calculadoras, os algoritmos para as operações fundamentais já não desempenham o mesmo papel no ensino fundamental que desempenhavam em 1930. Mas, de todo modo, a questão que se coloca para um curso de licenciatura, hoje, é a da necessidade de discutir os algoritmos tendo como referência a realidade do processo de ensino e aprendizagem escolar.

Dessa perspectiva, observa-se, antes de qualquer outra coisa, que ainda não há consenso na discussão sobre as formas de utilização das calculadoras nas salas de aulas da escola, em substituição ao ensino dos algoritmos. Dentro do amplo espectro em que se acomodam as posições a respeito desse assunto, destacamos duas para situar minimamente a questão:

- Com as calculadoras, a ênfase no processo escolar pode ser direcionada à resolução de problemas, aos significados das operações e às análises críticas dos resultados. O trabalho com as calculadoras para obter corretamente os resultados deve ser priorizado, abandonando-se o ensino dos algoritmos formais (Wheatley and Shumway, 1992)
- Além de promover estimativas mais críticas dos resultados das operações e ajudar os alunos a desenvolver certo tipo de “familiaridade” com os números (*number sense*), o uso das calculadoras pode liberar alunos e professores da execução repetitiva de certos cálculos, mas não implica na dispensa definitiva do saber fazê-los (Lima, 1991, p.199-203). Isso significa que, segundo essa posição, ainda deve fazer parte da prática escolar o ensino dos algoritmos formais para o cálculo do resultado das operações.

De todo modo, o fato a se destacar aqui é que, para participar com certa autonomia das discussões que, eventualmente, se desenvolvam a respeito do assunto em sua escola, o futuro professor deve, antes de tudo, conhecer como os algoritmos funcionam, a lógica operacional deles, as possíveis dificuldades dos alunos na sua utilização, etc. Assim, o conhecimento sobre os algoritmos formais ainda continua sendo parte da demanda da prática profissional docente na escola básica hoje e, portanto, essa questão se coloca, também, para o processo de formação na licenciatura.

3. Conclusão

A axiomática é, sem dúvida, uma forma importante de organizar e sistematizar o conhecimento matemático, mas serve a propósitos definidos que, muitas vezes, se chocam com os pedagógicos. Morris Kline, na sua análise crítica do chamado movimento da matemática moderna, comenta essa questão:

> Por volta da metade do século XIX, os números e suas propriedades estavam estabelecidos com base no uso corrente. Do mesmo modo, as propriedades das funções, derivadas e integrais, usadas no Cálculo, eram aceitas com base no que parecia evidente para as funções mais simples ou na confirmação dos resultados pelas aplicações físicas. Os matemáticos então se viram diante da tarefa de construir uma fundamentação lógica para as propriedades e resultados que eles utilizavam.(...) Assim, uma complicada e artificial estrutura de axiomas e teoremas foi erigida. O propósito dessa estrutura era satisfazer as necessidades profissionais dos matemáticos, que insistiam numa estrutura dedutiva, e nunca o de servir como uma abordagem pedagógica. (Kline, 1974, p.50)

A idéia dominante, entretanto, é a de que, fora da organização lógico-formal-dedutiva, o conhecimento matemático torna-se um amontoado de fatos dispersos, sem conexões e, portanto, sem o formato de uma teoria. A formação matemática na licenciatura se desenvolve orientada pelos valores conceituais e estéticos da matemática científica, assegurando, assim, em tese, um estatuto de formação teórico-científica. A articulação do processo de formação na licenciatura com a prática escolar é, então, concebida como uma tarefa a ser executada a partir do *exterior* da formação matemática.

O estudo que apresentamos procurou mostrar que a abordagem lógico-dedutiva — nos termos em que se organiza a matemática científica — não somente é insuficiente para a sistematização da matemática escolar como é também, muitas vezes, inadequada. Essa inadequação provém de várias características apontadas no estudo, mas uma das principais está associada ao fato de que a abordagem lógico-dedutiva é profundamente "econômica" na busca da "essência abstrata" dos conceitos e de características gerais das estruturas matemáticas particulares. Isso, muitas vezes, resulta numa identificação de certas interpretações e construtos associados aos conceitos ou às estruturas que, do ponto de vista da matemática escolar, é fundamentalmente inconveniente identificar. Em suma, o que o estudo nos sugere é que, tendo em vista as inadequações e insuficiências apontadas, a articulação do processo de formação na licenciatura com as questões postas pela prática docente escolar, mais do que tentar integrar à prática escolar uma formação específica orientada pela matemática científica — o fracasso histórico das disciplinas integradoras reforça a hipótese de que tal formação possa não ser “integrável” — demandaria uma concepção de formação “de conteúdo” que leve em conta a especificidade do destino profissional do licenciado e tome como referência central a matemática escolar. Isso pressupõe, evidentemente, o desenvolvimento, através de outros estudos e pesquisas, de uma compreensão aprofundada das relações entre matemática científica e matemática escolar e do papel de cada uma delas na prática docente escolar.

Referências

Baroody, A. **Children´s Mathematical Thinking**. New York: Teachers College Press, 1987.

Behr, M.; Lesh, R.; Post, T.; Silver, E. Rational-Number Concepts. In Lesh, R.; Landau, M. (eds). **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**. Florida: Academic Press, p.91-126, 1983.

Birkhoff, G.; Maclane, S. **Álgebra Moderna Básica**. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1980.

Brown, M. Place Value and Decimals. In Hart, K.(ed). **Children´s Understanding of Mathematics**: 11-16. London: John Murray, p.48-65, 1981.

Brown, M. Number Operations. In Hart, K.(ed). **Children´s Understanding of Mathematics**: 11-16. London: John Murray, p.23-47, 1981a.

Carpenter, T.P.; Moser, J.M. The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts. In Lesh, R.; Landau, M. (eds). **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**. Orlando: Academic Press, p. 7-44, 1983.

Chervel, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, n.2, p.177-229, 1990.

Chevallard, Y. **La Transposición Didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

Courant, R.; Robbins, H. **Que es la matematica?** Madrid: Aguilar, 1964**.**

Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. **Children Learning Mathematics.** A teachers guide to recent research. England, Schools Council Publications, 1993.

Ferreira, A.C. et al. Estado da arte da pesquisa brasileira sobre formação de professores que ensinam matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2000, Serra Negra. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2000.

Fiorentini et al. Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n.36, p.137-160, dez. 2002.

Fiorentini, D.; Nacarato, A..; Pinto, R. Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada. **Quadrante**, Lisboa, v.8, n.1/2, p. 33-60, 1999.

Fuson, K.C. Research on whole number addition and subtraction. In Grows, D.(ed). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, p.243-275, 1992.

Greer, B. Multiplication and division as models of situations. In Grows, D.(ed). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, p.276-295, 1992.

Knight, F.B. Some considerations of method. In: **The Twenty-Ninth Yearbook of the National Society For The Study Of Education**. Illinois: Public School Publishing, 1930. cap. 4.

Kline, M. **Why Johnny can´t add**: the failure of the new math. New York: Random House, 1974.

Lima, E. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

Lüdke, M. **Formação de docentes para o ensino fundamental e médio**: As Licenciaturas. Rio de Janeiro: CRUB, 1994.

Pereira, J. E. D. **Formação de professores**: pesquisas, representações e poder. Belo Horizonte: Autêntica, 2000.

Schifter, D. (ed). **What´s happening in math class?** New York: Teachers College Press, 1996. v. 1

Shulman, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

Sinclair, H.; Sinclair, A. Children´s mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. In Hiebert, J. (ed). **Conceptual and procedural knowledge**: the case of mathematics. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1986.

Souza, A.C. et al. Novas diretrizes para a Licenciatura em Matemática. **Temas e Debates**, v.8, n.7, p. 41-65, 1995.

Tardif, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

Wheatley, G.; Shumway, R. The potential for calculators to transform elementary school mathematics. In: **Calculators in Mathematics Education**. Reston, Virginia: NCTM Yearbook, p. 1-8, 1992.