EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E INVESTIGAÇÃO-AÇÃO: APRENDENDO PROBLEMAS ADITIVOS COM NÚMEROS NEGATIVOS JUNTO AOS MEUS ALUNOS

BANZATTO, Graziela Bortoletto – UNIMEP

GT: Educação Matemática/n.19

Agência Financiadora: CAPES

O presente trabalho, parte de uma dissertação de mestrado em Educação, busca contribuir para o ensino e aprendizagem dos números racionais relativos, através de uma pesquisa qualitativa desenvolvida em uma escola estadual de Piracicaba, no primeiro semestre de 2002.

Por que números racionais relativos? Ministrando aulas de Matemática para várias séries, já havia constatado a grande dificuldade apresentada por alunos em operações com números negativos e, conversando com outros professores da área, estes também demonstraram preocupações com o ensino e a aprendizagem de números negativos. Minha opção por investigar os procedimentos usados pelos alunos, apoia-se em Kamii (1985), que ressalta a importância de considerar o erro como processo do pensamento da criança, cabendo ao professor intervir nesse processo de raciocínio e não apenas corrigir a resposta final. Decidi colocar as atividades Matemáticas, com números negativos, em forma de problemas, pois, a resolução de problemas é considerada por vários autores (Polya, 1995; Krulik & Reis, 1997 e outros), e também por muitos professores de Matemática, como uma das principais tarefas da disciplina, ou seja, é o momento em que os alunos aplicam os conhecimentos adquiridos e se envolvem emocionalmente na busca de soluções para determinada situação.

Esta pesquisa, de natureza qualitativa, foi realizada sob a abordagem da Investigação-ação, tendo como cenário uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio do município de Piracicaba - SP, e duas salas de 7ª séries do Ensino Fundamental, nas quais sou professora de Matemática. O universo contemplado foi de 74 alunos e o estudo se desenvolveu durante os meses de março e abril de 2002. Estes alunos possuem idades que variam entre 12 e 15 anos, provenientes, em sua maioria, de classes sociais média e ou baixa, de vários bairros da cidade. Alguns deles já haviam sido meus alunos no projeto de reforço no ano anterior ao desenvolvimento dessa pesquisa.

A aplicação de quatro problemas aditivos com números negativos, similares aos utilizados na pesquisa conduzida por Bruno e Martinón (1997) forneceu os principais dados para esta pesquisa, ou seja, deram-me condições de responder as questões norteadoras desse trabalho, que são:

1- Por que problemas que são resolvidos com certa facilidade, com números positivos, apresentam dificuldades quando neles há números negativos?

2- Quais os procedimentos básicos utilizados pelos alunos, no processo de resolução de problemas com números negativos?

3- Os procedimentos usados pelos alunos, em diferentes problemas, são sempre os mesmos?

Para a coleta dos dados utilizei um caderno de campo para registrar as situações pertinentes, o recolhimento dos exercícios resolvidos pelos alunos e a realização de filmagens dos momentos de discussões e debates ocorridos durante as aulas. Os problemas foram aplicados em três etapas, que surgiram durante a realização da pesquisa. Não tínhamos formulado previamente estas etapas, mas, a pesquisa qualitativa dá-nos esta possibilidade, de criar, de acordo com as necessidades, as formas e maneiras de coleta dos dados.

A primeira etapa consistiu na aplicação dos problemas em forma de uma avaliação escrita. Os alunos foram avisados que os procedimentos utilizados por eles seriam analisados posteriormente, mas que nenhum aluno seria prejudicado, caso não conseguisse resolver ou cometesse erros.

Desta forma, os alunos resolveram os problemas, individualmente, sem nenhuma intervenção minha. A construção e sistematização das respostas escritas dos alunos nortearam-se por um procedimento de natureza exploratória, seguidas de análise apoiadas nas orientações da pesquisa qualitativa sugeridas por Lüdke e André (1986). A técnica de análise de conteúdo foi a escolhida para revelar as tendências de resolução dos problemas com números negativos.

A categorização, segundo Bardin (1977, p.117-120*),* é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero, com os critérios previamente definidos. É um processo de tipo estruturalista e comporta duas etapas: o inventário e a classificação. Assim sendo, após analisar as respostas, orientei-me de acordo com as categorias estabelecidas por Bruno e Martinón (1997), a saber:

Categoria 1: Alunos que seguem a Ordem em que os dados aparecem no problema;

Categoria 2: alunos que usam a Reta Numérica para resolver o problema;

Categoria 3: alunos que usam somente Números Positivos para resolver o problema.

Após a categorização dos resultados, verifiquei quais foram os procedimentos mais usados pelos alunos que obtiveram êxito, e os procedimentos mais usados pelos alunos que não obtiveram êxito, em cada um dos quatro problemas. Anotei no quadro as várias formas de resolução, certas e erradas, utilizadas pelos alunos e iniciei então a segunda etapa. Pedi aos alunos que se agrupassem e que novamente resolvessem os problemas escolhendo um entre os procedimentos mais utilizados, na etapa anterior, de tal forma a solucionar corretamente os exercícios. Esta etapa pareceu-me a princípio, que seria suficiente para a pesquisa, mas devido ao número ainda relevante de grupos que optou pelas alternativas incorretas, decidi então, partir para a terceira etapa.

Com os alunos em grupos, solicitei que o representante de cada grupo explicasse aos demais colegas da sala porque seu grupo havia escolhido aquela alternativa. Minha intenção era que, no debate, todos viessem a entender qual seria a alternativa correta, numa proposta de cooperação. Nesta etapa houve a minha mediação, pois alguns grupos não conseguiram avançar somente com as discussões entre eles, sendo que esta atitude mediadora baseou-se na concepção de zona de desenvolvimento proximal, de Vygotsky, referida por Baquero (1998: 97):

> *A distância entre o nível real de desenvolvimento, determinado pela capacidade de resolver independentemente um problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outro companheiro mais capaz.*

A análise das respostas escritas e orais dos alunos foram baseadas nos trabalhos de Bruno e Martinón (1997) e Bruno (2000), Rosa *et al* (1992), Coll & Derek (1998), Cudmani (1998), Lins (1993) e nos pressupostos vygotskyanos, demonstrados nos momentos de mediação da professora, nos moldes do que Vygotsky explica como "zona de desenvolvimento proximal", segundo Smolka e Góes (1996). A análise dos momentos de silêncio foram feitas apoiadas em Laplane (2000).

As questões propostas foram:

1) O elevador de um edifício antes de se mover estava no andar 8 e depois de mover-se estava no andar 3 do subsolo. Qual foi o movimento do elevador?
   Contexto: elevador
   Estrutura: estado inicial + variação = estado final (I2)[1]
2) João tem em sua casa 8 reais e deve a um amigo 11 reais, qual é a sua situação econômica?
   Contexto: dever/ter
   Estrutura: estado 1 + estado 2 = estado final (I3)
3) Uma pessoa nasceu no ano 15 antes de Cristo e morreu no ano 7 antes de Cristo. Quantos anos essa pessoa viveu?
   Contexto: cronologia
   Estrutura: estado inicial + variação = estado final (I2)
4) A temperatura em Londres é de 5 graus sobre zero e em Moscou de 8 graus abaixo de zero. O que deve acontecer com a temperatura em Londres para que seja igual a de Moscou?
   Contexto: temperatura
   Estrutura: estado 1 + comparação = estado 2 (I2)

O quadro 1, abaixo mostra os resultados obtidos com a avaliação na 7ª série A.

Quadro 1- Resultados obtidos na 7ª série A:

	ERROS		ACERTOS		BRANCOS	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Questão 1	21	77.7	03	11.1	03	11.1
Questão 2	14	51.8	10	37.03	03	11.1
Questão 3	9	33.3	16	59.2	02	7.4
Questão 4	19	70.3	03	11.1	05	18.5
TOTAL : 27 ALUNOS AVALIADOS						

Observamos pelo quadro 1, que as **questões 1 e 4** apresentaram uma porcentagem relevante de erros e a **questão 3** foi a que apresentou a maior porcentagem de acertos. A mesma avaliação e com os mesmos objetivos, foi aplicada na 7ª série B no dia 12/03/02 e o quadro 2 abaixo mostra-nos os resultados obtidos:

[1] I2 significa incógnita, ou valor desconhecido, na posição 2.

Quadro 2- Resultados obtidos na 7ª série B:

	ERROS		ACERTOS		BRANCOS	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Questão 1	23	67.6	11	32.3	00	0.0
Questão 2	10	29.4	21	61.7	03	8.8
Questão 3	11	32.3	10	29.4	13	38.2
Questão 4	17	50.0	11	32.3	06	17.6
TOTAL : 34 ALUNOS AVALIADOS						

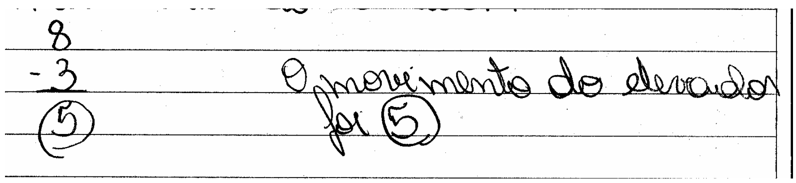
Pela quadro 2 verificamos uma porcentagem de erros grande nas **questões 1 e 4** e o maior número de acertos na **questão 2**, a **questão 3** traz o maior número de brancos.

A análise, a seguir, será feita em cada um dos problemas, reunindo os resultados de ambas as classes.

<u>Problema 1: O elevador de um edifício antes de se mover estava no andar 8 e depois de mover-se estava no andar 3 do subsolo. Qual foi o movimento do elevador?</u>

Categoria 1: ordem dos dados:

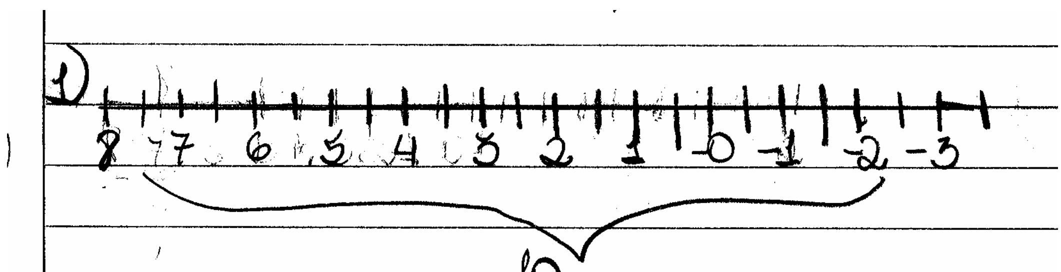
33 alunos resolveram o problema com a seguinte operação: $\begin{array}{r} 8 \\ -\ \underline{3} \\ 5 \end{array}$



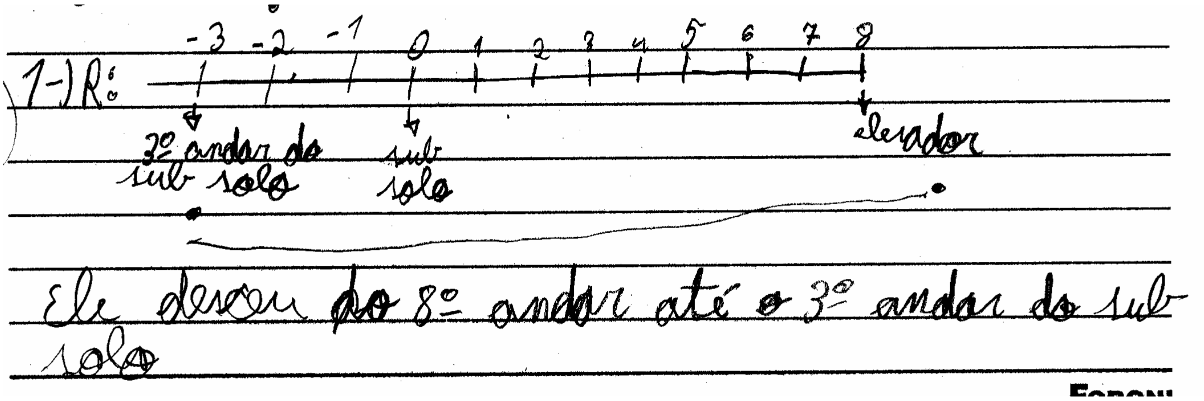
O que se verifica neste caso foi que os alunos seguiram a ordem em que os dados apareceram no enunciado do problema e realizaram a operação de subtração.

Categoria 2: Reta numérica

18 alunos usaram a reta numérica. Percebemos que estes alunos usam a reta numérica provavelmente por não verem a operação imediatamente, então sentem- se mais seguros ao representarem a reta.



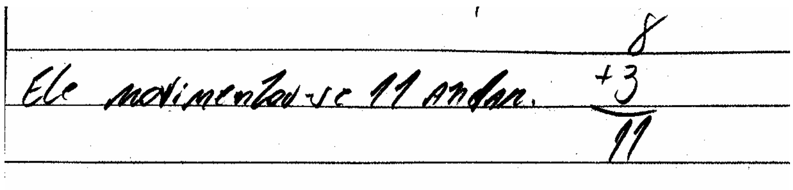
Podemos observar que o aluno não conta de 8 a -3, coloca sinal negativo no zero e dispõe os números negativos à direita do zero, o que pode indicar falta de familiaridade com o uso da reta numérica e outros instrumentos usados para medir como régua, fita métrica, esquadros.



Observa-se que o aluno coloca o zero da reta como início ou final do subsolo, parecendo ser o seu ponto de referência.

Categoria 3: Números positivos

6 alunos resolveram o problema da seguinte forma:

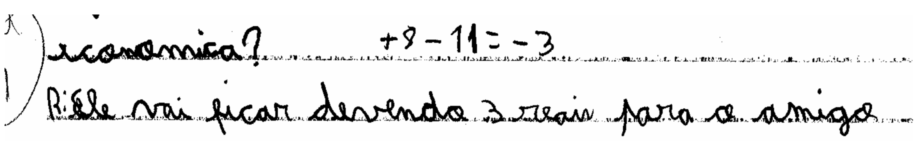


Na 2ª questão, na 7ª série A, observei um número grande de erros, o que foi uma surpresa, pois acreditava que o contexto dever/ter seria significativo para eles, devido à proximidade deste problema com o cotidiano das pessoas:

<u>Problema 2: João tem em sua casa 8 reais e deve a um amigo 11 reais, qual é a sua situação econômica?</u>

Categoria 1: ordem dos dados:

6 alunos seguiram a ordem em que os dados aparecem no enunciado:



Categoria 2: Reta numérica

Temos aqui apenas um aluno:

- 3 reais
Você conta de 8 até o 11 o resultado que der é negativo

Categoria 3: Números positivos

42 alunos resolveram a situação com a operação:

$$\begin{array}{r} 11 \\ -\ \underline{08} \\ 03 \end{array}$$

R°: 11-8=-3. A situação dele é pecima

É possível perceber que a maioria dos alunos colocou a operação de subtração com o maior valor (11) em cima. Em conversa com outras professoras durante os horários de trabalhos pedagógicos coletivos (HTPCs) e na sala dos professores de nossa escola, embora não possamos afirmar, há a hipótese de que durante as séries iniciais é comum as professoras dizerem aos alunos que na subtração “o maior valor fica em cima”, o que faz com que eles generalizem e usem esta informação em qualquer outra situação.

Problema 3: Uma pessoa nasceu no ano 15 antes de Cristo e morreu no ano 7 antes de Cristo. Quantos anos essa pessoa viveu?

Categoria 1: Ordem dos dados

35 alunos seguem o enunciado e a maioria resolve com a seguinte operação:

$$\begin{array}{r} 15 \\ -\ \underline{07} \\ 08 \end{array}$$

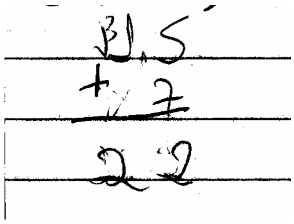
$$\begin{array}{r} 0\overset{1}{}5 \\ -\ \underline{7} \\ 8 \end{array}$$
Essa pessoa viveu 8 anos

Categoria 2: Reta numérica

A seguir, três alunos que imaginaram a reta:

3) não entendi. como é que ele morreu antes do tempo em que ele nasceu.

Categoria 3: Números positivos

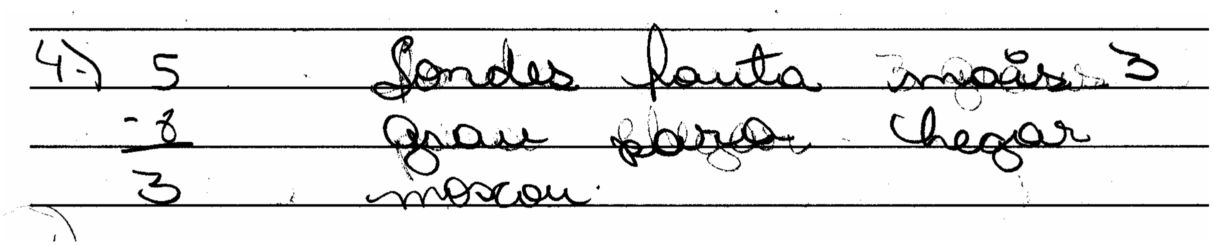


Percebemos aqui que os alunos operam somente com números positivos.

Problema 4: A temperatura em Londres é de 5 graus sobre zero e em Moscou de 8 graus abaixo de zero. O que deve acontecer com a temperatura em Londres para que seja igual a de Moscou?

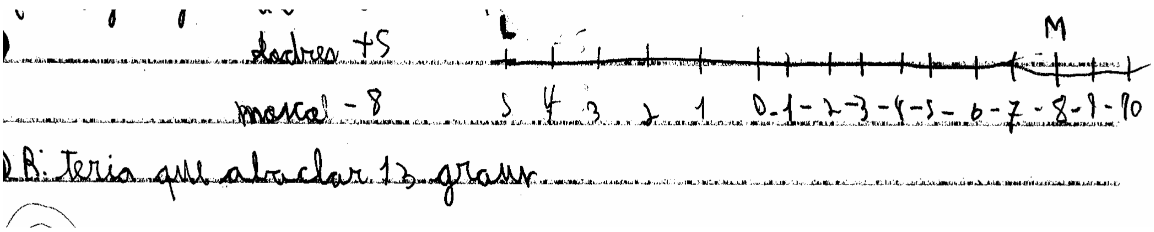
Categoria 1: Ordem dos dados

Oito alunos seguem a ordem e alguns resolveram a questão da seguinte forma:



Categoria 2: Reta numérica

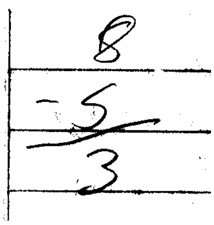
Vinte e dois alunos usaram este procedimento, por exemplo:



Categoria 3: Números positivos

13 alunos resolvem dentro desta categoria e a maioria coloca a operação:

$$\begin{array}{r} 08 \\ -\ 05 \\ \hline 03 \end{array}$$



Com os resultados individuais das questões, verifiquei as tendências que os alunos apresentaram para resolver as questões. Os procedimentos mais usados pelos alunos que obtiveram êxito na resolução dos problemas, em ambas as séries, foram:

Representação na reta numérica

De acordo com Lins (1993), os alunos operaram no Campo Semântico da "reta numérica".

Os procedimentos mais usados pelos alunos que não obtiveram êxito foram:

Seguir a ordem em que os dados aparecem no enunciado das questões e realizar operações de soma ou subtração com estes valores.

A seguir apresentei aos alunos as tendências que haviam seguido, individualmente, para a resolução dos problemas. Coloquei na lousa cada questão, e em forma de alternativas, os procedimentos que haviam seguido para resolver os problemas. Sugeri aos alunos que, em grupos, discutissem e escolhessem a melhor alternativa para cada problema, justificando a escolha por escrito, estimulando a socialização de idéias e pensamentos, bem como a cooperação entre todos. Inicialmente achei que os grupos encontrariam facilmente as respostas corretas, mas diante dos resultados verifiquei a necessidade de conhecer com maior profundidade a maneira de pensar dos alunos. Assim, dei início aos procedimentos que denominei de 3º estudo.

Passei aos grupos, em ambas as classes, os resultados obtidos, mas não disse quais grupos haviam obtido êxito ou não nas respostas, apenas pedi que cada grupo explicasse aos demais colegas porque haviam escolhido aquela alternativa, ou deixado em branco nos casos em que isto ocorreu. Esta atividade foi filmada para que eu pudesse participar mediando os debates entre os grupos, concretizando a idéia de Vygotsky de que:

> *O que hoje se realiza com assistência, ou com o auxílio de uma pessoa mais especializada no domínio em jogo, no futuro se realizará com autonomia sem necessidade de tal assistência (Baquero, 1998: 97).*

Protocolo 4 – relativo ao processo de discussão do problema 1, contexto elevador :

O aluno Lu inicia a aula explicando aos colegas como resolveu e optou pela alternativa A.

(1) Lu: Ah... porque ele estava entre o 8 e o 3, então pode ser o número 5. Eu acho que é a letra A, porque ele estava entre o 8 e o 3, então pode ser o 4 e o 5.

(2) He: Aí não está falando que ele foi para o 3º andar acima do subsolo, está falando que ele foi para o abaixo do <u>subsolo</u>, então não é 5, é 11 o movimento que ele fez, porque era 5 se ele fosse acima do subsolo, mas é abaixo, então fica 11 mesmo!

Os alunos aplaudem a explicação de He.

(3) P: E aí, pessoal? Qual a alternativa certa, letra a ou letra b?

(4) Classe: letra b!

(5) Fe vai à lousa e desenha uma reta numérica, vertical, de 8 a -3, colocando uma flecha, ao lado, apontando para baixo.

(6) P: Fe, explique-me porque você colocou essa flechinha lá em cima.

(7) Fe: O elevador desceu do 8º até o térreo.

(8) P: Ele está descendo, por isso a flechinha está naquele sentido?

(9) Fe: É!

(10) P: Qual é a operação que vocês vão colocar aí?

(11) Jo: Se pegar do 8 ao zero, que é positivo, e se somar com o negativo vai dar 11 positivo, que é três negativos e oito positivos.

(12) P: Coloque a operação, Jo. Põe na lousa, do jeito que você está falando.

He vai à lousa, falando sozinho: 8 positivo...

(13) Jo: Mais com menos dá mais, não é?

(14) He: Mais com menos dá menos!

(15) Fe: É dá mais. Mais com mais dá mais!

(16) Jo vai à lousa e escreve: + 8 – 3 =

(17) Jo: Não sei se é assim. É assim professora? Não é assim...

(18) Yu: Não está no zero? Até o 8... Depois – 3, daí se põe 8 mais 3 lá! Dá 11! Onze andares ele desceu.

(19) P: Yu, você falou 8 + 3...

(20) Yu: Dá 11!

(21) P: Mas, não é o 3 que está abaixo do térreo?

(22) Yu: É, então...

A sala toda se alvoroça.

Ma tenta falar.

(23) P: Ma, como eu provo, em Matemática, que o elevador está descendo?

(24) Ma: Número negativo.

(25) P: Como eu provo, o que o Ma está dizendo?

Todos falam ao mesmo tempo.

(26) Jo: Ele tem 8 e deve 3, sobra 5.

(27) He: Dez reais, ele tinha todo dinheiro para pagar, ele pagou só que ainda assim ele ficou devendo 3. Não é essa conta, Dona?

(28) P: E agora? É o mesmo caso?

(29) He: Não é o mesmo caso mas, a conta pode ser parecida.

(30) P: Pode ser? Então tentem fazer, vamos lá!

He hesita e não vai à lousa.

(31) P: Vocês lembram o dia em que a gente fez os cálculos de variação de temperatura?

(32) Sala: Lembramos.

(33) P: Esse exercício que está na lousa lembra, para vocês, o cálculo de variação de temperatura?

Ninguém responde.

(34) P: Lembra ou não lembra, gente? Como é que a gente calculava a variação de temperatura?

A sala continua discutindo.

(35) Jo para a professora: Menos três mais oito...

(36) Ri: Vai dar 5, Dona!

(37) Jo: Lá (aponta a reta, na lousa), está – 3, né? Aí eu faço – 11? Por exemplo, ali já estava devendo três, daí eu tenho que fazer mais, menos oito? Quer dizer se eu devia 3... Devia 3, agora vou dever oito então, vou ficar devendo onze. É isso?

Discutem entre si.

(38) P: É isso, então? É menos três, menos oito? É isso?

(39) Jo: É!

(40) P: Mas, por quê?

(41) Jo: Porque ele devia 3. Pegamos o menor (aponta para o -3 na reta), fizemos menos o maior.

(42) P: Por que vocês pegaram o menor menos o maior? Expliquem para eles, o que significa isso?

(43) Fe: Não sei explicar.

(44) P: Explique Fe, o que você estava explicando lá (aponta para o lugar que ele se senta).

(45) Alla: Por que – 8, se não está no subsolo?

(46) Fe: Dona, o elevador desceu daqui (aponta o 8 na reta), eu pego o – 3 e... Eu faço – 8... – 8 e – 3, vai dar – 11. Ele desceu então... Eu pego do último para o primeiro, certo?

(47) Jo e toda a sala: Certo!

Ao que me parece pela sua fala, o aluno (na linha 1), não leva em conta o fato do 3º andar estar no subsolo, mas uma coisa chama a atenção: o aluno parece estimar o resultado.

O aluno He (linha 2) tenta mostrar ao colega que o subsolo é um dado relevante neste problema, no que a classe concorda, embora o termo sublinhado não deveria ser subsolo e sim térreo. Isto pode nos mostrar a diversidade de idéias e conhecimentos numa sala de aula, subsolo pode ser claro para alguns e totalmente desconhecido para outros.

Na linha 3 solicito à sala que ajudem-me a encontrar a operação Matemática que resolva satisfatoriamente o problema. Verifiquei que alunos que usam esquemas, desenhos ou outras formas de representação parecem compreender melhor a situação-problema (Rosa, 1992). Pode-se observar pelas falas (linhas de 5 a 10), a compreensão da situação enunciada, sendo que o obstáculo a se transpor é a sentença Matemática que confirme o resultado correto.

O aluno (linha 11) apoia-se na reta numérica, tem o zero como referência e imagina a operação afirmando que se somar oito com três negativos vai dar 11.

Percebemos pelos diálogos (12 a 15) que os alunos vão falando as regras de sinais aparentemente sem nenhuma compreensão ou relação com a situação problema e o aluno (linha 16) trabalha com os dados na seqüência que eles aparecem no enunciado do problema.

O aluno (na linha 18) trabalha com o zero como ponto de referência e o menos três mas, na operação mental ele trabalha com o três positivo, como verificamos pela linhas seguintes.

Na linha 26, o aluno troca o contexto e a estrutura do problema provavelmente por lhe ser mais fácil trabalhar no contexto dever/ter e com a incógnita na 3ª posição (Bruno & Martinón, 1998). Pela linha 29, outro garoto parece usar o raciocínio indutivo, pensando talvez que se já deu certo em outro problema poderá dar aqui também (Rosa, 1992).

O silêncio dos alunos (linha 33) pode indicar a dificuldade em relacionar as situações problema. Dificuldade constatada várias vezes neste trabalho. Assim, logo a frente, tentei relacionar o problema com outro correlato (Polya, 1995), com o objetivo de ajudá-los.

Fazer a relação do número negativo com o estado "dever" (linha 37), pareceu-me muito forte, isto pode indicar a forma como lhes foi ensinado ou relacionado os números, por exemplo: positivos com ganhos e negativos com perdas ou dívidas. Segundo Lins (1993), o aluno tenta usar a justificativa do Campo Semântico "dívida".

A aluna (linha 45) não entende o sinal, não lhe é claro quando é o sinal do número e o da operação.

Ainda com dificuldades de elaborar sua explicação o aluno (linha 46) consegue de certa forma mostrar que houve a movimentação do elevador como quando houve variação na temperatura (da final para a inicial).

Protocolo 5 – Relativo ao processo de discussão do problema 2, contexto dever/ter:

Gre explica porque seu grupo escolheu a alternativa A.

(1) Gre: Se ele tem 8 reais, para ele chegar a 11 ele precisa de 3 reais.

(2) P: Então A, é exatamente a operação que você está falando?

(3) Gre: É.

(4) Alla explica para todos a escolha da alternativa c: Ele tinha 8 reais, só que ele estava devendo 11. Daí se ele pagasse esses 8 reais, ele ia ficar com zero, ia acabar o dinheiro dele. Mesmo assim, falta – 3 que ele estava devendo para o amigo dele.

(5) P: Então, você fica com a alternativa C?

(6) Alla: C!

(7) P: E agora Gre? Alla está certa, ou você que está certo?

(8) Gre: Não sei.

(9) P: O que você acha?

(10) Gre: Ela está certa.

(11) P: Ela está certa, por quê?

(12) Gre: Não sei professora.

(13) P: Então, você ainda não entendeu o exercício?

(14) Gre: Não.

(15) P: Você acha que o seu ainda está certo?

(16) Gre: Não, o dela está certo?

(17) P: O dela mas, por quê?

(18) Gre: Porque ele estava devendo 8... Ele estava devendo 11, para chegar no 8 tem que dar – 3.

(19) P: Tem que dar – 3?

(20) Gre: Tem.

(21) P: Então, é a letra C?

(22) Gre: É.

(23) P: Quando está devendo dá – 3?

(24) Gre: Dá.

(25) P: Alguém, na classe, acha que é outra alternativa?

Alunos: Não!

Pela linha 4 verificamos que aluna usa o ponto zero como um marco e interpreta corretamente o problema, indicando a sentença Matemática que demonstra seu raciocínio.

O aluno (linha 14) diz não ter entendido o problema ao mesmo tempo em que diz, ser certa a resolução da colega. Sua explicação parece-me confusa, pois ele diz que para se chegar ao 8, do -11, tem que dar -3. O que talvez possa ser considerado é que o aluno calculou que de 8 a 11 falta 3 então de 8 ao -11, falta -3.

Protocolo 6 – Relativo ao processo de discussão do problema 3, contexto cronologia:

A aula começa com o aluno Adri explicando como seu grupo resolveu essa questão.

(1) Adri: Eu pensei em somar lá, os dois números. Quando deu 22, eu falei assim, deu certo! Eu e o Ma pensamos... Foi só isso.

(2) He: Eu pensei que era a letra C, porque como os anos antes de Cristo vem diminuindo... Daí, impossível você somar. Então, tem que... Eu pensei que era para subtrair mesmo... Aí, eu subtraí lá, e achei que era a letra C.

(3) P: E você acha que aquela operação está correta?

(4) He: Ah... Acho que sim... Não sei se está correta.

(5) P: Prestem atenção! Essa operação quer dizer, exatamente, o que está escrito aqui? (aponta para o enunciado na lousa).

Alguns dizem não, outros dizem é, e outros dizem não sei.

(6) P: Olhando para essa reta numérica, aquela operação, quer dizer, exatamente, isso? Olhem lá, para a lousa. Vocês estão enxergando, - 15, - 7, estão?

(7) Vi: 15 – 7.

(8) P: 15 – 7. Então, será aquela, a operação correta? Vamos pensar sobre o que nós vimos na aula ontem?

(9) Alunos: É a letra A, Dona!

(10) P: É a letra A, então? Por que é a letra A?

Os alunos começam a discutir entre si.

(11) P: O que significa dizer que uma pessoa viveu – 8 anos?

(12) He: Que ela não viveu.

(13) P: É possível – 8?

(14) Vi: Não, + 8, só que eu não sei como fazer a conta!

Vi vai à lousa e coloca: $\begin{array}{r} -15 \\ -\underline{\;07} \\ 08 \end{array}$

(15) P: E dá 8?

Alunos: Não.

(16) Vi: Dá! Dá 8 positivo.

(17) Alla: Não... -15 + - 7 dá – 22.

(18) P: Isso! Quando vocês querem saber quanto tempo uma pessoa viveu, vocês começam pelo ano que ela nasceu ou pelo ano que ela morreu?

(19) He: Nasceu...

(20) Alla: Pelo ano que ela morreu.

(21) P: Então vamos tentar? Vamos tentar como a Alla falou? Em que ano ele morreu, Alla?

(22) Alla: - 7.

(23) P: Então, venha fazer Alla, para a gente ver se dá certo.

(24) Alla: Mas, eu não sei...

(25) P: Venha, eu vou te ajudar.

Jo se oferece para ajudar também.

Jo e Alla vão à lousa. Alla escreve: - 7 – 15.

(26) Jo: É isso?

Alla olha para a lousa e completa: - 7 - 15 = - 22.

(27) P: É isso?

Alla balança a cabeça negativamente. Jo e Alla trocam idéias. A sala e a professora esperam.

(28) P: Está faltando alguma coisa, não está?

(29) Alunos: Não.

(30) Ri: Como que ele pode estar devendo 22 anos?

(31) P: Ajudem eles então, pessoal!

(32) Alla: Dona, menos com menos dá mais!

Jo escreve: - 7 - - 15.

(33) P: Pode colocar os dois assim, direto?

(34) Alunos: Não! Tem que por parênteses.

Jo apaga e coloca: - 7 – (- 15) =

(35) Jo: É assim?

(36) P: Pessoal, será que está certo?

(37) Alunos: O menos com menos dá mais.

Vários alunos, dão sugestões mas, eles ficam confusos, escrevem e apagam a lousa:

- 7 – (- 15) =

+ 7 – 15 =

Jo pensa, e apaga a operação colocando: + 7 + 15.

O aluno Vi vai à lousa tentar ajudar os colegas.

(38) Alla: - 7... + 15... – 22... Ai Dona, não sei!

Alla resolve fazer a operação na calculadora e Jo então escreve o resultado 8.

(39) Alla eufórica: Dá oito!

O aluno (linha 4) demonstra segurança quando explica imaginando a reta mas, não pode afirmar com segurança se a operação Matemática está de acordo com o seu raciocínio.

Na linha 5, solicitei aos alunos que relessem com atenção o enunciado. Alunos que costumam solucionar corretamente problemas encontram com facilidade os dados e a incógnita nos enunciados, (Rosa, 1992).

Busquei (linha 6) chamar a atenção dos alunos para a relação entre o que eles vêem concretamente através da reta e o que a operação Matemática lhes mostra.

Na linha 8, diante do possível entendimento do aluno de que a operarão não é a correta, peço-lhes que pensem, tentando relacionar esta situação com uma já vista anteriormente, (Polya, 1995).

Com os meus questionamentos (linha 10) os alunos mudam de opinião e escolhem a alternativa A, sem se darem conta de que esta alternativa também não é a correta.

É interessante perceber que o aluno (linha 12) responde como se já tivesse visto em algum lugar usar número negativo para indicar os anos de vida de alguém. Bruno e Martinón (1997) consideram como uma interpretação incorreta do resultado.

O aluno (linha 14) compreende a situação, mas tem dificuldade de elaborar uma operação para resolver o problema corretamente, esta dificuldade ou obstáculo tem aparecido em diversas situações neste trabalho, Bruno e Martinón (1997), em trabalhos semelhantes alertam para a questão da dificuldade de se adaptar uma operação Matemática.

Sabendo que o resultado é 8 positivo o aluno (linha 16) acredita que a operação dará o resultado correto, isto pode indicar a falta de compreensão de operações com números negativos.

Na linha 18 tentei aproximar a situação problema da realidade vivida por eles, ou seja, qual a operação que fazemos, muitas vezes mentalmente, para sabermos a idade de alguém.

A aluna Alla (linha 24) resolve continuar tentando diante da minha ajuda e do colega, parecendo que estas situações de cooperação tornam os alunos mais seguros.

Os alunos (linha 26) associam o sinal do número ao da operação de subtração, isto é demonstrado como um obstáculo também em Bruno e Martinón (1997), parecendo ser um indício da ausência de compreensão da estrutura do problema.

Verifica-se o aluno (linha 30) passar ao contexto dever/ter, provavelmente mais fácil para ele, até mesmo, validar o resultado.

Protocolo 7- Relativo ao processo de discussão do problema 4, contexto temperatura:

(1) Lu: Eu acho que é a letra A, porque Londres está acima de zero, está acima do três, enquanto Moscou está abaixo de zero.

(2) P: Então, você acha que aquela operação, que está na lousa, explica isso que você está falando, Lu?

(3) Vi: É a A, porque você tem que diminuir três graus.

(4) P: E aquela operação prova isso, Vi?

(5) Vi: É.

(6) Professora para o grupo de Lu: Todos concordam com isso?

(7) Grupo de Lu: Sim.

Solicito ao grupo do Jo que expliquem a todos, porque escolheram a alternativa B.

(8) Jo: Não sei, Dona. Na B, dá 13 mas, poderia ser 12 também...

Na lousa está escrito: + 5 – 8 = 13.

(9) Alla: Porque é 5 sobre zero, então é mais, aí o 8 está abaixo, então é mais 5, menos 8, que é igual a 13.

(10) Professora: Dá 13? Mais 5, menos 8 dá 13?

Alla vai para a calculadora.

Jo pega a calculadora da mão da Alla.

(11) Jo: Aqui é sinal!

(12) Alla: Não é a letra B, Dona! É a C.

(13) P: Não tem a alternativa C!

Jo resolve desenhar a reta na lousa.

(14) P: A reta, Jo?

(15) Jo: Agora explica aí, Alla!

(16) Alla: Eu?! Ó, Dona, cinco graus está sobre zero, está desse lado. Então, aqui é sobre zero, e oito é abaixo de zero, é esse aqui. Então, a gente faz esse e mais esse. Eu não estou falando a letra B, estou falando o que eu acho.

(17) P: Então vai... Vai fazendo o que você acha... Continue...

(18) Alla: Mas, e se estiver errado?

(19) P: Não tem importância!

(20) Alla: Ó, menos cinco... Não, mais cinco porque está sobre zero, menos oito porque está abaixo então, a gente tem que pegar, tirar menos oito de cinco.

(21) Alla escreve: - 8 + 5 = 13.

(22) Alla: Vai dar 13, Dona? Não, vai dar – 3.

(23) P: Vai dar – 3. Na sua opinião tem que abaixar três graus, ou tem que abaixar treze?

(24) Jo: Treze!

(25) P: Por que 13, Jo?

(26) Jo: Porque do – 8, para chegar no 5, dá 13.

(27) P: Isso! E agora? Falta só a operação, então! Tem que acertar essa operação, aí. Como é que você fez a aula passada? Vocês fizeram, vocês conseguiram entender a aula passada, como foi?

Silêncio.

(28) P: Alguém quer ajudar a Alla?

(29) Alunos: Não.

(30) P: Olhem! A Alla já entendeu que tem que abaixar 13 graus mas, ela está com a dificuldade da aula passada, de colocar a operação lá. Qual é a operação que nós vamos colocar que vai mostrar que tem que abaixar 13 graus?

(31) Alla: Assim, Dona?

(32) P: Alla, Você tem que pegar primeiro a temperatura final, ou a temperatura inicial?

(33) Alla: A final.

(34) Jo: Essa aqui, ó... (aponta para o – 8, na reta)

Alla escreve: - 8 – (+5).

(35) P: Temperatura final menos a inicial. É assim?

(36) Alla: É. Menos 8, menos cinco.

(37) P: Isso! Daí dá quanto?

(38) Jo: - 13!

(39) P: Isso! E por que mesmo, dá – 13?

(40) Alla: Porque... Ah, Dona eu não sei!

(41) P: Vamos lá, porque mesmo que dá – 13, pessoal?

(42) Alla: Porque abaixou 13 graus!

(43) P: Isso! Quando está abaixando, então tem o sinal...

(44) Alla interrompe: Tem o sinal de menos... É isso aí!

(45) P: Isso! Está ótimo!

Final da aula.

O grupo de alunos (linhas 1 a 5) escolhe a alternativa onde é feita uma operação de subtração, sem usar números negativos, onde se subtrai o valor positivo menor do positivo maior.

Embora, sem poder afirmar, parece-me que o aluno (linha 8) estima o resultado, o que pode indicar uma característica positiva em resolver situações problema.

O aluno (linha 11) mostra à colega o que é sinal da operação e o que é o do número. Jo mostra ter uma compreensão da estrutura deste problema.

O aluno pela linha 14, apoia-se desenhando a reta, apresentando estar mais seguro diante do desenho. Ao desenhar a reta para a colega ele demonstra acreditar que com o desenho a colega conseguirá resolver corretamente o problema.

A aluna (linha 18) mostra-se preocupada com o fato de poder errar, mas quando lhe digo não ter importância ela continua a atividade.

Pela linha 22 notamos que a aluna percebe sozinha que a operação não está correta, o que os alunos fazem é apenas inverter a ordem dos dados, eles não se dão conta da estrutura do problema.

Na linha 32, ao perceber que os alunos não estão conseguindo ajudar a colega, então decido ensinar e aprender junto com a aluna como terminar este problema.

Na linha 40 cai por terra a minha certeza de que a aluna compreendeu a situação. Esta é uma situação que muitos professores passam quando acreditam que seus alunos já superaram as dificuldades. Reorganizando minhas idéias busquei na sala alguém que pudesse ajudar a colega, ou que se lembrasse do sentido da reta numérica.

REFLEXÕES FINAIS: AS LIÇÕES QUE APRENDI COM MEUS ALUNOS

Ao decidir investigar os procedimentos usados por alunos de 7as séries na resolução de quatro problemas aditivos com números negativos, comecei a pesquisar a história da Matemática, para compreender melhor a construção dos números e verificar que os significantes (nomes, símbolos) usados para explicitar os conhecimentos matemáticos possuem uma existência sócio-cultural.

Isto me proporcionou a compreensão que entre a fala e a escrita dos números há uma complexa tarefa para as crianças e que de acordo com os pressupostos vygotskyanos, cada criança é única e seu desenvolvimento acontece naturalmente dentro do grupo social a que pertence. Segundo Nunes et al (2001), na solução de problemas simples de adição e subtração, a criança usa um esquema de ação, que pode ser seus dedos, tracinhos, blocos e etc, esse tipo de solução é classificada como pensamento concreto. Isso não significa que a criança não seja capaz de abstrair, pois ela implicitamente sabe que o resultado obtido com os dedos, por exemplo, é o mesmo que seria obtido com outros objetos apresentados no enunciado do problema. Para os autores esse comportamento demonstra a sua capacidade não só de abstrair como de generalizar.

Observei, através das resoluções escritas e das falas dos alunos a diversidade cultural entre eles, a dificuldade em se imaginarem em um elevador, subindo e descendo até o subsolo, pois alguns alunos não sabiam o que este termo significava; compreender as variações de temperaturas de países que nem conhecem; a imaginação da linha do tempo e a representação do dever dinheiro com um traço (-) na frente. Verifiquei como é complexa a subtração, quando o aditivo é menor que o subtrativo, ou seja, um conceito totalmente compreendido e fácil aos professores, mostrou-se neste trabalho algo difícil e que se não for adequadamente trabalhado poderá constituir-se em um obstáculo Matemático para sempre.

Pela análise das tabelas 1 e 2, verificamos que os problemas 1 e 4 apresentaram uma porcentagem relevante de erros em ambas as classes.

O procedimento mais usado para a resolução do problema 1, foi a categoria 1, ou seja, os alunos seguiram a ordem em que os dados apareceram no enunciado da questão. A posição da incógnita (I2) também pode ser um fator que dificultou a realização correta da questão, como se verifica pelo protocolo 4.

Para a realização do problema 4, os procedimentos mais usados pelas alunos que não obtiveram êxito na questão foram as categorias: 1, ordem em que os dados aparecem no enunciado e categoria 3, usar números positivos. A posição da incógnita neste caso também é I2. Os alunos que obtiveram êxito desenharam ou imaginaram o termômetro, isto é, usaram a categoria 2, reta numérica, sendo que alguns alunos tinham o zero como marco de referência, demonstrando compreensão entre zero origem e relativo, sem fim em si mesmo. Também alguns casos de desenhos da reta numérica com os valores negativos à direta do zero foram constatados.

Os resultados com muitos erros no problema 2, em uma das salas, me surpreenderam pois o contexto dever/ter pareceu-me o mais significativo para eles neste estudo. Analisando os procedimentos usados pelos alunos que não obtiveram êxito percebi, que pertenciam à categoria 3, ou seja, usaram números positivos e em alguns casos interpretaram incorretamente o resultado obtido: 3. Não se deram conta que o três era devedor ou negativo como pode-se verificar pelo protocolo 5.

O enunciado do problema 3 foi o que apresentou maior dificuldade na compreensão e interpretação dos alunos, em uma das salas, como observa-se pela tabela 2, cuja porcentagem de erros e brancos foi bem significativa. Usar a categoria 1, ordem dos dados e a categoria 3, números positivos, causou vários resultados incorretos. Verifiquei também, que o contexto cronologia representou um obstáculo talvez pelo fato da situação problema se passar antes de Cristo. Pelo protocolo 6 constata-se as dificuldades e percebe-se que alguns alunos tentam mudar o contexto cronologia para o contexto dever/ter, provavelmente mais fácil e significativo para eles. Entre as resoluções dos alunos que obtiveram êxito com este problema, verifiquei que a categoria 2, desenhar ou imaginar a reta numérica, foi o procedimento mais utilizado.

As dificuldades apresentadas pelos alunos e as diversas estratégias de resolução dos problemas utilizadas por eles permitem-me concordar com Bell (1986), apud Bruno e Martinón (1997), de que a utilização de problemas aditivos com números negativos exige que os alunos se familiarizem com determinadas situações - problemas ou determinadas estruturas de problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAQUERO, R. **Vygotsky e a aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa/Portugal: Edições 70 Lda, 2000.

BRUNO, A., MARTINÓN, A. Procedimientos de Resolución de Problemas Aditivos con Números Negativos. **Enseñanza de Las Ciencias,** 15 (2), 249-258, 1997.

BRUNO, A. Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. IV Simposio SEIEM, Huelva, 2000. Disponivel em: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm.

COLL, C., DEREK, E. **Ensino, aprendizagem e discurso em sala de aula: aproximações ao estudo do discurso educacional**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

CUDMANI, L.C. La Resolucion de problemas en el Aula. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 20 (1): 75-85, março, 1998.

KAMII, C. **A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para atuação junto a escolares de 4 a 6 anos**. 2.ed. Campinas: Papirus, 1985.

KRULIK, S., REYS, R.E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** Trad. Hygino H. Domingos, Olga Corbo, São Paulo: Atual, 1997.

LAPLANE, A. L. F. Interação e silêncio na sala de aula. **Cadernos Cedes** 50. Relações de ensino: Análises na perspectiva Histórico-Cultural. 1ª edição, 2000.

LINS, R.C. Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa. **Revista de Educação Matemática da SBEM-SP.** Ano 1 – n.1- setembro, 1993.

LUDKE, M., ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1996.

NUNES, T., CAMPOS, T.M.M., MAGINA, S., BRYANT, P. **Introdução à Educação Matemática: os números e as operações numéricas.** 1 ed. São Paulo: Proem, 2001.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 2 reimpr. Rio de Janeiro: interciência, 1995.

ROSA, P.R.S., MOREIRA, M.A., BUCHWEITZ, B. Alunos bons solucionadores de problemas de física: Caracterização a partir de um questionário para Análise de Entrevistas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 14 (2), 94-100, agosto, 1992.

SMOLKA, A. L. B., GÓES, M. C. R. de (Orgs.) **A linguagem e o outro no espaço escolar.** Campinas: Papirus, 1996.

VYGOTSKY, L.S. **A formação social da mente. O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1984.