EQUADOR, PARALELOS E MERIDIANOS: APENAS LINHAS IMAGINÁRIAS?[1]

PATAKI, Irene[2] - PUC-SP

ALMOULOUD, Saddo Ag[3] - PUC-SP

GT: Educação Matemática /n.19
Agência Financiadora:. Não contou com financiamento.

Introdução

Este trabalho pretende propor uma reflexão acerca da articulação entre a Geometria esférica e a Geografia e apresentar os principais resultados de uma seqüência didática, elaborada a partir de uma situação-problema contextualizada, que visou mostrar a relação interdisciplinar entre esses domínios do conhecimento.

Tal situação-problema nos conduziu à elaboração de atividades e, por sua vez, à exploração de algumas noções vistas mais intensamente sob o ponto de vista da Geografia, a saber: Pólos, Equador, Paralelos terrestres, Meridianos, Latitude e Longitude de um local.

Em nossa investigação por livros didáticos[4] direcionados para o Ensino Fundamental, encontramos as seguintes definições:

Coordenadas geográficas como "um conjunto de linhas imaginárias (paralelos e meridianos) que servem para localizarmos um ponto ou um acidente geográfico na superfície terrestre."

Os Paralelos terrestres são linhas imaginárias traçadas paralelamente ao Equador (0°); os Meridianos como semicírculos imaginários traçados sobre a Terra de pólo a pólo." Determinados pelos paralelos e meridianos, a Latitude é "a distância em graus de um lugar

---

[1] Este trabalho fundamentou-se na Dissertação acerca do tema *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar* apresentada na PUC- SP e sob a coordenação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.
[2] Mestra em Educação Matemática do Programa de Estudos em Educação Matemática da PUC- SP e professora da rede pública municipal da cidade de São Paulo.
[3] Doutor em Mathématiques et Apllications pela Universite de Rennes I, França.
[4] Extraído do livro de COELHO, M. de A.; TERRA, L. *Geografia Geral e espaço socioeconômico.* São Paulo. Moderna, 2001.

até o Equador" e a Longitude como "distância em graus até o Meridiano de Greenwich (0°)."

A Geometria de Georg Friederich Bernhard RIEMANN (1826 – 1866) adota como modelo uma superfície esférica, na qual as retas são circunferências máximas, portanto, têm comprimento determinado; segmentos são arcos de circunferências máximas e muito mais...

A superfície do globo terrestre pode ser considerada uma superfície esférica. Essa esfericidade já incomodava Isaac NEWTON (1642 – 1727), que propôs a forma de um elipsóide achatado nos pólos, devido ao efeito da força gravitacional e da centrífuga causadas pela rotação. Então, por praticidade, a forma dela foi considerada como um elipsóide de revolução, embora em mapas de escalas pequenas, conste como uma esfera, o que implica em um erro que pode ser ignorado.

Alguns momentos históricos

Tudo se iniciou há mais de dois mil anos atrás, com o questionamento a respeito da possibilidade da demonstração do quinto postulado de EUCLIDES de Alexandria (330 a.C – 275 a.C provavelmente). Uma história que percorreu os continentes, séculos e séculos, envolvendo mentes fantásticas e inquietas, gênios que acreditavam que "A Geometria conduz a alma à verdade", como nos afirmou Platão.

O tempo diminuiu sua velocidade, no século XIX, quando RIEMANN numa aula proferida num sábado, 10 de junho de 1854, brindou historiadores, filósofos e outros, nenhum matemático, com sua visão sobre a curvatura de espaços n-dimensionais, sem escrever qualquer equação.

RIEMANN foi o primeiro a substituir a hipótese da reta infinita pela da reta ilimitada e afirmara que "quando se estendem as construções do espaço ao infinitamente grande, necessitamos fazer a distinção entre o ilimitado e o infinito; o primeiro pertence às relações de extensão; o segundo, às relações métricas." (BONOLA, 1951, p. 143)

Assim, RIEMANN provou a veracidade de quatro postulados de EUCLIDES, uma vez que, por dois pontos diametralmente opostos passam muitas circunferências máximas e ponto equivale a um par de pontos; a distância entre dois pontos é a medida do arco de uma circunferência, entretanto, o círculo que esses dois pontos determinam pode ser definido como um conjunto de pontos de uma superfície esférica que estão a uma distância fixa de um ponto, bem como todos os ângulos retos têm medidas iguais.

O Postulado das paralelas foi negado e substituído por outro que gerou uma nova Geometria não-euclidiana, pondo um final na questão e concluindo que se trata de um postulado independente dos demais e, portanto, não pode ser demonstrado.

Chegamos ao século XXI e ao anseio de pesquisadores e docentes de que há necessidade de repensarmos o ensino da Geometria e o papel que lhe cabe na Educação Matemática, mais particularmente, nos referimos às Geometrias não-euclidianas da qual faz parte a Geometria esférica, alvo de investigações, quer histórico-pedagógica, quer sobre a problemática gerada pelo quinto postulado, quer acerca de experiências em cursos de licenciatura e no Ensino Fundamental, na tentativa de torná-las domínios estruturados e integrados ao conteúdo escolar.

FAINGUELERNT (1997, p.47) nos indica um possível caminho: "O renascimento e a reformulação do ensino de Geometria, não é apenas uma questão didático-pedagógica, é também epistemológica e social. A Geometria exige do aprendiz uma maneira específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir."

Interdisciplinaridade

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999), quando nos referimos as interconexões estabelecidas por intermédio da prática e entre as diversas áreas do conhecimento, estamos mencionando a função primordial da interdisciplinaridade, que, essencialmente, não criará novas disciplinas ou saberes, mas utilizará os diversos conhecimentos para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista.

Tal integração pode ocorrer desde uma troca de idéias, até a inter-relação dos conceitos, da epistemologia, da terminologia, da metodologia, dos procedimentos de coleta, da análise de dados e daquela que constata a existência de muitas e diversas formas de conhecimento (ibidem, p.88).

A interdisciplinaridade é caracterizada por supor um eixo integrador: o objeto de ensino, um projeto de pesquisa, uma experimentação, uma atividade ou plano de intervenção, reunindo os conceitos passíveis de serem utilizados de cada disciplina, sem que ela perca a sua individualidade. Dessa forma, a interdisciplinaridade abrange o problema, desde a sua concepção, execução até a avaliação.

Para FAZENDA (2001, p. 11), a interdisciplinaridade pode ser conceituada como "uma nova atitude diante da questão do conhecimento, de abertura à compreensão de aspectos ocultos do ato de aprender e dos aparentemente expressos, colocando-os em questão" e distingue cinco princípios que contribuem para uma prática docente interdisciplinar: humildade, coerência, espera, respeito e desapego; atributos como a afetividade e a ousadia; pressupostos como a metamorfose e a incerteza.

No que se refere à Matemática, a interdisciplinaridade surge como um critério central de escolha para um núcleo comum, ao lado da contextualização. Ambas permitem a interligação entre os vários conceitos matemáticos e suas diferentes formas de pensamento e entre as diversas áreas do conhecimento.

O elo Geografia/ Geometria

A relação com a Geografia se estabelece, na medida em que o saber geográfico contribui para a compreensão do mundo e institui uma rede entre os elementos que constituem a natureza, o social, o econômico, o cultural e o político.

Essa conexão vem desde os tempos mais remotos, quando a procura para compreender o que acontece a sua volta foi um dos maiores enigmas da humanidade. A maioria dos povos da Antigüidade era constituída de comerciantes e navegantes que precisavam conhecer as rotas marítimas e, conseqüentemente, a Terra.

Segundo RAISZ (1969), aos egípcios devemos, provavelmente, a origem do termo “geodésia” usado na medição de terras que podem ter sido iniciadas no reinado de RAMSÉS II (1333 a.C- 1300 a.C), com o intuito de demarcar os limites das propriedades rurais e cobrar impostos.

Aos gregos atribuímos a base do sistema cartográfico atual. Possuidores de muitos conhecimentos sobre a Terra, os quais chamavam de “Geografia” que significava “escrever sobre a Terra" ou "estudo da superfície terrestre", introduziram, no início do século IV a.C, a idéia de que o planeta tinha a forma redonda.

Dentre os escritos gregos mais famosos, destacamos os de ARISTÓTELES (384 a.C – 322 a.C) que provou a esfericidade terrestre, os de ERATÓSTENES (270 a.C – 195 a.C) que construiu um mapa-múndi do mundo habitado com sete paralelos e sete meridianos e calculou a medida da circunferência terrestre em torno de 45000 km (a medida correta é 40110 km).

HIPARCO (190 a.C – 125 a.c) propôs um mapa em que o mundo está dividido em onze paralelos distanciados igualmente, cujos comprimentos seriam determinados pelas observações simultâneas dos eclipses da Lua.

Cláudio PTOLOMEU de Alexandria (90 a.C – 168 a.C), em sua obra mais famosa *Geografia,* fez estudos sobre os princípios da Cartografia, da Geografia, das Projeções, dos Métodos de Observação Astronômica e da Matemática, além de um mapa-múndi e 26 mapas com detalhes, sendo considerado o primeiro Atlas Universal.

POSIDONIO (135 a.C – 41 a.C) utilizando a distância entre Rodes e Alexandria, considerou a altura da estrela Canopus, chegando à medida da circunferência máxima terrestre como 18000 milhas ou 29000 km, aproximadamente, o que representava três quartos do valor real. Possivelmente, Cristóvão COLOMBO (1451 – 1506) tenha adotado essas medidas, levando-o a confundir a América com a Ásia.

A seqüência de ensino e os estudos preliminares

Tal proposta desenvolveu-se em diversas fases, nas quais, primeiramente, buscamos analisar o ponto de vista filosófico gerador de uma posição unicista do pensamento matemático - a fisolofia de KANT- e as implicações no progresso desse pensamento; consultamos os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, a respeito do ensino de Matemática e de Geometria e sobre o recurso da interdisciplinaridade; realizamos estudos a respeito do objeto de ensino, por meio de publicações a respeito da Geometria riemanniana; exploramos as concepções dos professores acerca dessa Geometria do ponto de vista da teoria e da prática pedagógica.

As produções pesquisadas se mostraram relevantes, na medida em que nos permitiram examinar a origem e o desenvolvimento dessa Geometria e as implicações para o seu ensino e aprendizagem.

Dentre as publicações, analisamos 16 livros, tendo sido estabelecidos alguns critérios quanto à abordagem dada à Geometria esférica.

I - A obra considera uma esfera como modelo da Geometria esférica.

II - A obra considera uma superfície esférica como modelo dessa Geometria.

III - A obra faz um relato histórico sobre essa Geometria.

IV - A obra trata de alguns aspectos dessa Geometria, sem inter-relação com os conteúdos anteriores e posteriores.

V - A obra apresenta alguns aspectos dessa Geometria, sob o ponto de vista somente teórico, sem atividades de aplicação.

VI - A obra possui atividades retratando alguns elementos dessa Geometria, entretanto não faz referência e ela.

VII- A obra aborda essa Geometria teoricamente e por meio de atividades contextualizadas.

Para a análise dos critérios adotados, elaboramos o seguinte quadro:

QUADRO 3 - TAXA DAS PRODUÇÕES EM FUNÇÃO DOS CRITÉRIOS

CRITÉRIOS	TAXAS (%)
I	62,5
II	43,7
III	37,5
IV	75
V	62,5
VI	37,5
VII	6,2

Como podemos notar, a maioria das publicações analisadas retrata somente alguns aspectos da Geometria esférica e, apenas teoricamente, sem encadeamentos com conteúdos anteriores e posteriores, não propondo atividades que permitam interpretar a realidade que ela apresenta e, às vezes, sequer essa Geometria foi mencionada.

No que se refere às concepções dos professores, sujeitos da pesquisa, pudemos concluir que, embora soubessem da existência das Geometrias não-euclidianas, não haviam participado de algum estudo a respeito delas e nem sobre a Geometria esférica, levando-nos a deduzir que esses conteúdos não estavam incorporados ao currículo de muitas

Universidades. Observamos, também, que os docentes acreditavam que a Geometria euclidiana não resolveria todas as situações da nossa realidade.

Alicerçados pelos estudos preliminares, apontamos as seguintes hipóteses de pesquisa:

- O conhecimento geométrico possibilita a compreensão/ descrição/ representação de forma organizada do nosso mundo.
- A apreensão dos conteúdos constituintes da Geometria esférica poderá nos conduzir a argüições/ reflexões/ transformações/ conscientização da nossa posição como docente, diante da ação pedagógica.
- A utilização dos recursos da interdisciplinaridade e da contextualização promoverá conexões/ encadeamentos/ solidez de saberes inerentes à Geometria esférica e de outros campos do conhecimento.

A elaboração e a experimentação da seqüência de ensino contendo uma situação-problema e mais oito atividades fundamentou-se na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy BROUSSEAU (1986), que permeia o processo de ensino e aprendizagem com situações de ação, de formulação, de validação e da institucionalização do conhecimento.

As realizações didáticas foram direcionadas pela Metodologia de Pesquisa intitulada Engenharia Didática, cujo conceito devemos a Michèle ARTIGUE (1988) e que possibilitou o controle desse processo, por se basear na concepção, na realização, na observação e na análise da situação-problema e de cada uma das atividades.

Na fase da Engenharia denominada análise *a priori*, prevemos os possíveis métodos/ estratégias de resolução de cada situação e os conhecimentos mobilizados em cada uma; pressupomos as dificuldades surgidas na solução de cada situação; identificamos os novos conhecimentos/ saberes que poderão ser adquiridos; prevemos como institucionalizar esses conhecimentos/ saberes.

Na outra fase, a análise *a posteriori,* nos apoiamos nos dados obtidos na experimentação, por meio de observações, das produções dos professores e das discussões ocorridas durante os encontros. A confrontação dessas análises possibilitou a validação das nossas hipóteses de pesquisa.

A proposta de ensino

Trabalhamos com seis professores do Ensino Médio e da rede pública estadual da cidade de Arujá, São Paulo, totalizando 19 horas e 30 minutos, e constitui-se de uma situação-problema[5], a seguir, e mais oito atividades.

> O comandante de um navio recebeu a seguinte mensagem de um helicóptero: *localizados náufragos numa ilha de coordenadas* $\Phi_I = 68° \ 40'N$ *e* $\lambda_I = 013°40'E$. Naquele momento, a posição do navio era $\Phi_N = 42°10'N$ e $\lambda_N = 051°20'W$. Que distância o navio deverá percorrer para chegar à ilha?

Uma das finalidades de tal situação é fazer emergir outras Geometrias e, portanto, novos conhecimentos que permitam solucionar problemas que a Geometria euclidiana não consegue, tendo sido colocados à disposição dos docentes bolas de isopor de diferentes diâmetros, um globo terrestre grande e vários globos pequenos.

Para a representação desta situação, usamos como modelo um triângulo de vértices P, N, I, correspondendo, respectivamente, a um pólo, à posição do navio e à posição da ilha (Fig. 1). Esse triângulo, sobre uma superfície esférica, o globo terrestre, foi denominado triângulo esférico, por seus lados serem arcos de circunferências máximas, ou seja, segmentos de reta, segundo o sentido dado por RIEMANN.

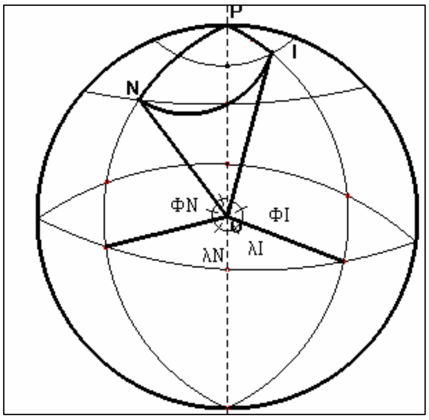

FIG 1- REPRESENTAÇÃO DO TRIÂNGULO PNI

Observamos que quase todos os professores não reconheceram as letras gregas Φ e λ, entretanto as letras N, E e W o foram por três deles como sendo Norte, Leste e Oeste,

[5] Esta situação foi adaptada de COUTINHO, L., *Convite às Geometrias não-euclidianas, 2001, p. 99.*

respectivamente. Por esse motivo, explicitamos que as letras gregas Φ e λ representavam, respectivamente, a latitude e a longitude de um lugar.

Durante a execução desta situação-problema, foram vivenciadas situações de ação, ao discutirem e refletirem, na busca de sua solução; de formulação, na qual, por intermédio de discussões entre si, tentaram identificar elementos conhecidos que permitissem solucionar o problema, acontecendo questionamentos como estes: "a latitude é horizontal ou vertical? norte é latitude ou longitude?" Também ocorreu a etapa de validação, no momento de institucionalização, quando definimos conjuntamente circunferência, círculo, superfície esférica e esfera.

Pretendendo verificar que, em vista da forma "esférica" da Terra, o percurso do navio seria dado por uma figura não-plana e representar, no plano, a trajetória descrita pelo navio até a ilha, construímos a primeira atividade composta de duas situações. Para tanto, os professores procuraram manipular o globo terrestre.

Situação 1

a) Para resgatar os náufragos você acha que o percurso do navio deverá ser em linha reta? Justifique.

b) Em Geometria, qual a figura que você usaria para modelar esse problema? E essa figura pode ser uma figura plana?

c) Como você desenharia a situação do problema?

Alguns professores inferiram que a esfera modelaria a situação, embora um deles tenha representado o problema num sistema de coordenadas cartesianas.

Situação 2

a) Marque um ponto, no espaço abaixo. Quantos caminhos distintos podem ser traçados por esse ponto?

b) Você recebeu uma superfície esférica. Marque um ponto nela. Quantos e que tipos de caminhos distintos podem ser traçados por esse ponto? Esses caminhos têm comprimento finito?

c) O problema lhe dá dois pontos distintos numa superfície esférica. Ligue-os por vários caminhos. Qual é o menor caminho que liga esses pontos? Esse caminho tem comprimento finito?

d) Prolongue esse menor caminho nos dois sentidos. Quantos caminhos você obteve? É possível determinar o comprimento deles?

e) Se considerarmos dois caminhos distintos, numa superfície esférica, eles têm ponto de interseção?

Alguns docentes concluíram que existem "infinitos caminhos de comprimento determinado, passando por um ponto de uma superfície esférica", que o menor caminho que liga dois pontos distintos, numa superfície esférica, é "a distância entre eles", que "por dois pontos distintos de uma superfície esférica passam infinitos caminhos". Isso mostrou o aspecto provisório do saber, anteriormente, adquirido na Geometria euclidiana de que há um único caminho que liga dois pontos numa superfície plana.

Institucionalizamos que os caminhos de comprimento máximo são chamados de circunferências máximas ou geodésicas da superfície esférica e que o menor caminho entre dois pontos distintos é um arco de circunferência.

Na segunda atividade, composta de duas situações, objetivamos localizar e definir os pólos terrestres; identificar e definir o Equador, os Paralelos terrestres e os Meridianos, no globo terrestre, relacionando-os às circunferências e semi-circunferências máximas.

Situação 1

a) O globo terrestre possui um eixo de rotação. Como se chamam as interseções do globo com esse eixo?

b) Localize e caracterize o Equador.

c) Identifique que tipos de circunferências você vê na superfície do globo terrestre.

d) Quais das circunferências são denominadas paralelos terrestres?

e) Quais das circunferências são denominadas Meridianos?

Observamos que os professores possuíam conhecimentos a respeito dos pólos, localizaram adequadamente o Equador e alguns, os Paralelos terrestres e os Meridianos. Um dos docentes definiu Equador como "uma linha horizontal que divide o globo em dois hemisférios", outros, porém, já utilizaram a palavra "circunferência".

Os Paralelos terrestres foram associados, por uns, aos Trópicos de Câncer e de Capricórnio, apontando a influência dos conhecimentos dados em Geografia. Outros, usaram "circunferências paralelas ao Equador" e "circunferências 'paralelas' ao Meridiano de Greenwich", colocando a palavra "paralelas" entre aspas, por não julgá-la adequada e, possivelmente, haveria outra denominação nesse caso. Os Meridianos foram definidos como "circunferências..." ou "semi-circunferências...", embora um deles, ainda, os associasse a linhas.

Institucionalizamos que, na Terra, há referenciais fundamentais, como os pólos, o Equador, os Meridianos, os Paralelos e as suas direções de rotação. A Terra gira, diariamente, em torno do seu eixo de rotação. Esse eixo intercepta a superfície terrestre em dois pontos chamados Pólo Norte e Pólo Sul.

No globo terrestre, o Equador é uma circunferência máxima**,** cujo diâmetro é perpendicular ao eixo de rotação da Terra e divide o globo em duas partes iguais: o Hemisfério Norte e o Hemisfério Sul.

Existem, também, várias semi-circunferências máximas, que vão de um pólo ao outro chamadas Meridianos sendo que, pelos pólos, passam dois meridianos, um é o antimeridiano (ou antípoda) do outro. Além disso, há diversas circunferências menores paralelas ao Equador que são os Paralelos terrestres. À direção anti-horária do giro da Terra chamaremos de Leste e a direção oposta de Oeste.

Percebemos que os docentes se surpreenderam com as conexões surgidas entre a Geometria esférica e a Geografia e com o fato de estarem gostando do que descobriam.

Esclarecemos que não apontamos como erros algumas respostas dadas pelos professores, em virtude da situação ter procurado promover a interdisciplinaridade entre um conteúdo abordado em Geografia e a Geometria esférica e, conseqüentemente, a mudança para uma linguagem geométrica, simultaneamente, com a organização conceitual de um novo saber, tal como saberes provisórios se estruturando, procurando se encaixar.

Nessa mesma atividade, situação 2, procuramos comparar a localização de um ponto, no plano cartesiano, com a de um ponto no globo terrestre; localizar um ponto, numa superfície esférica, por meio de suas coordenadas latitude e longitude e determinar, aproximadamente, a posição do navio e da ilha no globo terrestre.

a) Você sabe que, no plano cartesiano XOY, um ponto pode ser localizado por suas coordenadas x e y. Como um ponto pode ser localizado, no globo terrestre?
b) Como você pode localizar, no globo terrestre, a posição do navio e da ilha, por meio da latitude e da longitude de ambos?
c) Determine, no globo terrestre, aproximadamente, a posição em que se encontram o navio e a ilha.

Uma figura representativa da atividade (Fig 2) encontra-se a seguir:

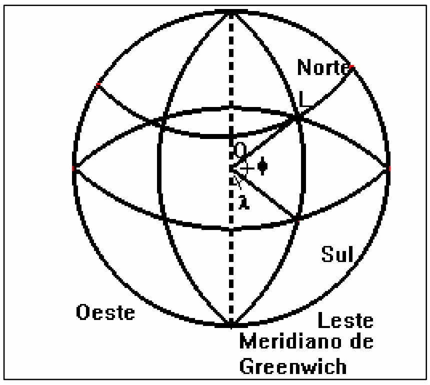

FIG 2- REPRESENTAÇÃO DAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE UM LUGAR L

A maioria dos professores afirmou que um ponto pode ser localizado, no globo terrestre, por meio do Equador e dos Meridianos, sendo para um deles “tomando a linha do Equador que é longitude, e também pelos meridianos, com informações numéricas”. Outro inferiu que “através das coordenadas geográficas (latitude e longitude)” e todos localizaram, adequadamente, a posição do navio e da ilha.

Após discussões, foi institucionalizado que:

A localização geográfica de um lugar L é dada por sua latitude e longitude, que formam o Sistema de Coordenadas Geográficas.

A latitude Φ de um lugar L (Fig 3) é a medida do arco de meridiano, que vai do Equador ao paralelo do lugar. Será chamada Norte, se pertencer ao Hemisfério Norte e Sul, se estiver no Hemisfério Sul. A sua unidade de medida é, usualmente, dada em graus, minutos e segundos e varia de 0° a 90°.

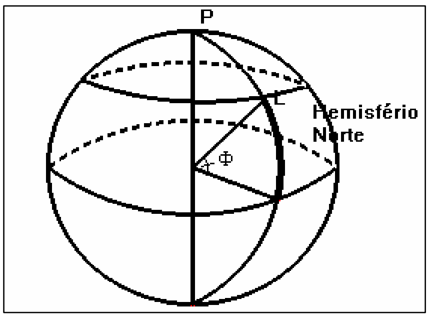

FIG 3- REPRESENTAÇÃO DA LATITUDE DE UM LUGAR L

A longitude λ de um lugar L (Fig 4) é a medida do arco do Equador, com extremos na interseção do Meridiano de Greenwich (tomado como referência) com o Equador e na interseção do meridiano do lugar com o Equador. Será denominada Leste, se o lugar ficar à direita do observador (que estará de frente para aquele meridiano) e pode ser indicada por um sinal positivo e Oeste, se estiver à esquerda, sendo indicado com um sinal negativo. A sua unidade de medida é, geralmente, dada em graus, minutos e segundos e varia de 0°a 180°.

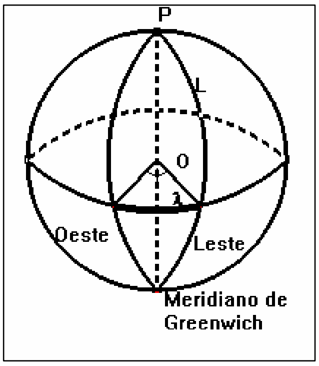

FIG 4- REPRESENTAÇÃO DA LONGITUDE DE UM LUGAR L

A atividade 3 buscou definir e medir a distância entre dois pontos, utilizando os instrumentos adequados de medida, construir uma régua esférica e reconhecer a unidade de medida a ser usada.

Como você observou, unindo os dois pontos distintos dados no problema, obtemos um arco de circunferência.

a) Procure medir a distância entre esses pontos. Que instrumentos você utilizou? Que unidades você pode usar para medir essa distância?

b) Há uma única distância entre esses pontos? Qual a distância entre os pólos Norte e Sul?

Os docentes puderam manipular, também, réguas centimetradas, cortes de barbante, fitas métricas, tiras de cartolina e, após, discussões, nas quais cada um procurou validar suas concepções, concluíram que os instrumento de medida da distância entre dois pontos, numa superfície esférica, deveria ser um material maleável e optaram, posteriormente, pela tira de cartolina denominada por eles de régua esférica.

A seguir, temos um modelo dessa régua, no qual fizeram a correspondência entre o grau e uma unidade de comprimento. (Fig 5)

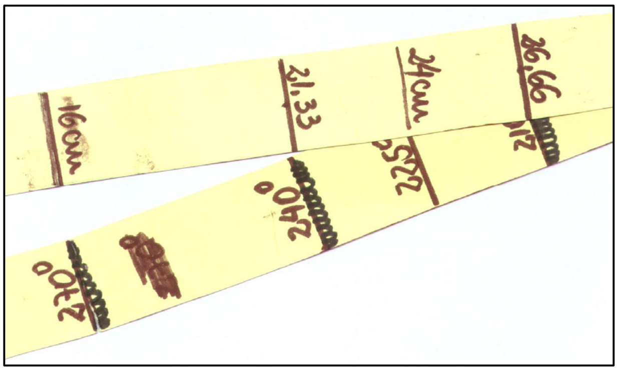

FIG 5- PROTOCOLO DE UMA RÉGUA ESFÉRICA

Comprovaram que a unidade de medida seria o grau e que a distância entre os pólos mede 180°, reconhecendo a Milha Marítima Internacional, que corresponde a 1852 m como uma unidade da navegação marítima, associando 60 milhas a um arco de 1° de circunferência máxima.

Na atividade 7, a situação-problema foi solucionada, depois de determinarem a Relação Fundamental dos Triângulos Esféricos[6], utilizando a Trigonometria plana. Acharam essa relação útil para a determinação da medida de um lado e dos ângulos de um triângulo esférico e que permite solucionar a situação, o que ocorreu mobilizando conhecimentos de todas as atividades anteriores, incluindo os da Trigonometria plana, da Geometria euclidiana, da Aritmética e da Álgebra.

Na atividade posterior, definiram reta e segmento, numa superfície esférica, verificaram a não-validade do Postulado das Paralelas, isto é, não existe paralelismo entre retas nessa superfície e sim concorrência, comprovaram que a reta tem comprimento determinado.

Após, concluíram que o encontro de duas circunferências máximas determina um ângulo esférico e a intersecção de três circunferências máximas, um triângulo esférico (Fig 6), tal que seus pontos dois a dois pertençam a um mesmo arco de circunferência máxima, desde que sejam os menores arcos.

---

[6] A Relação Fundamental para os Triângulos esféricos é dada por $\cos a = \cos b \ \cos c + \text{sen } b \ \text{sen } c \ \cos \hat{A}$.

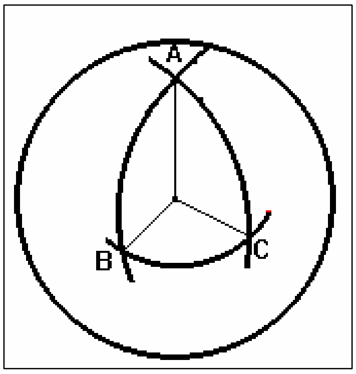

FIG 6- REPRESENTAÇÃO DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

O estudo desses triângulos nos conduziu às conclusões de que: existem triângulos com um ângulo reto, com dois ângulos retos e com três ângulos retos; a soma das medidas de seus ângulos internos foi um valor entre 180° e 540° e que a soma das medidas de seus ângulos externos foi um valor entre 0° e 360°.

Concluímos, ainda, que existe congruência entre dois triângulos (quatro possibilidades), mas não semelhança; que é possível construirmos um polígono de dois lados, mas não um quadrado! Que o Teorema de Pitágoras não é aplicável a um triângulo esférico retângulo.

Conclusão

Os resultados alcançados nos permitem inferir que a seqüência de ensino proposta, a partir de uma situação-problema, nos parece consistente e coerente, porque sua construção, tal como o trabalho de um engenheiro, apoiou-se em alicerces firmes previamente estabelecidos, edificou-se por meio da relação entre teoria/ experimentação e finalizou com sua validação/ institucionalização

As pesquisas de BROUSSEAU nos ampam, porque os professores, ao serem colocados diante de um problema a ser resolvido, precisaram argumentar, refletir, ouvir o outro, partilhar suas soluções e apresentá-las como modelos a serem julgados e as soluções aceitas se converteram em saberes oficiais, podendo ser utilizados nas atividades subseqüentes. É o saber perpassando pelas fases de ação, formulação, validação e institucionalização.

Observamos, nos docentes, modificações em suas concepções anteriores, porque, à medida que institucionalizávamos novos conhecimentos, passaram a usar a terminologia adequada, mobilizaram o pensamento geométrico que transitava ora pela Geometria euclidiana, ora pela Geometria de RIEMANN. Simultaneamente, estabeleceram inter-relações entre os diversos domínios da Matemática e a Geografia, reforçadas por um contexto que abordou uma situação real.

Os estudos de BARTH (1993) também contribuíram para a concretização deste trabalho, pois, segundo a pesquisadora, uma formação docente deve provocar mudanças na relação do professor com o saber e a sua elaboração.

Pudemos notar o saber tomando forma, cada professor estruturando suas idéias, movimentando conhecimentos anteriores e encaixando novos, compartilhando seus resultados com o outro, discutindo com entusiasmo e, simultaneamente, observamos o despontar da autoconfiança pela valorização de si mesmo.

Além disso, percebemos que houve mudanças de atitudes e valores, no momento da troca de experiências individuais, pois, para solucionar o problema, precisaram integrar-se mais às discussões, deliberando suas conclusões com mais segurança e determinação. A emoção invadiu as suas próprias decisões. Aí está o saber em suas múltiplas formas: estruturado, evolutivo, cultural, contextualizado e afetivo.

A contextualização da situação em questão permitiu que diversos conhecimentos fossem utilizados para resolvê-la, inter-relacionando saberes de Matemática e de Geografia, o que, certamente, implicará numa mudança na organização da escola, no currículo escolar, no plano de aula de cada professor envolvido, sem que cada um perca a sua individualidade, enfim, um comprometimento de todos no ensino e na aprendizagem.

Esperamos que nossa pesquisa tenha revelado que é possível geógrafos e matemáticos partilharem saberes, permeando novo e o velho, o passado e o futuro. Afinal, o Equador, os Paralelos terrestres e os Meridianos não são apenas linhas imaginárias.

BIBLIOGRAFIA

ALMOULOUD, S. Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo, PUC-SP, 2.sem.2000.

ARTIGUE, M. *Ingénierie Didactique.* Recherches em Didactique des Mathématiques, Paris, v. 9, n . 3, p. 281-308, 1988.

BARTH, B-M., *O saber em construção.* Lisboa. Instituto Piaget, [1993?].

BONOLA, R. *Geometrias no euclidianas: Exposición histórico-crítica de su desarollo*. Buenos Aires. Espasa – Calpe Argentina, 1951.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio.* Brasília, 1999.

BROUSSEAU, G. *Fondements et* méthodes *de la didactique des Mathématiques.* v. 7, n. 2, p. 33-115. La Pensée Sauvage,Grenoble,1986.

COUTINHO, L. *Convite às Geometrias não-euclidianas.* Rio de Janeiro. Interciência, 2001.

FAINGUELERNT, E. K., *O Ensino de Geometria e a Teoria das Inteligências Múltiplas: uma experiência com Informática no Colégio Santa Úrsula, no Rio de Janeiro.* Pátio revista pedagógica. Porto Alegre. Ano 1. n. 1, p. 46-50, maio/jul. 1997.

FAZENDA, I. (org.). *Dicionário em construção: interdisciplinaridade.* São Paulo. Cortez, 2001.

PATAKI, I. *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar.* São Paulo, 2003. 213 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

RAISZ, E. *Cartografia Geral.* Rio de Janeiro. Científica, 1969.