

SONDANDO E INTERVINDO NA COMPREENSÃO DE CONCEITOS: O CASO DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa – UFPE

GT: Educação Matemática /n.19

Agência Financiadora:. CAPES

É indispensável, no ensino em sala de aula de conceitos matemáticos, o desenvolvimento de formas eficientes de sondar o que os alunos já conhecem, de acompanhar o conhecimento que estão adquirindo e de analisar o entendimento que poderão vir a possuir auxiliados por processos de intervenção bem planejados pelo professor. Sem mecanismos adequados de avaliação, acompanhamento e planejamento, o professor fica limitado na sua ação de mediador da aprendizagem de seus alunos. O professor que não sabe o que seus alunos conhecem, que não acompanha a construção de conhecimento dos mesmos e não tem clareza dos aspectos dos conceitos sobre os quais ele deseja intervir, não poderá objetiva e intencionalmente auxiliar seus alunos em seus desenvolvimentos conceituais.

Qualquer instrumento de sondagem de conhecimentos limita-se a avaliar certos aspectos de conceitos e é preciso ter clareza sobre o que se está avaliando. Com o uso de formas diferentes de se avaliar o desenvolvimento de um conceito, até mesmo resultados divergentes podem ser obtidos. Por meio do uso de um instrumento pode-se evidenciar que os alunos possuem um bom conhecimento de um conceito e por uso de outro instrumento pode-se concluir que os mesmos alunos pouco ou nada conhecem sobre o conceito.

Ao se analisar a compreensão do conceito de número inteiro relativo, por um lado pode-se observar que alguns estudos (Davidson, 1987; Davis, 1990) mostraram que crianças bem pequenas – a partir dos quatro anos de idade – são capazes de resolver problemas aditivos que envolvem números relativos. Por outro lado, diversos estudos (Gallardo e Rojano, 1992; Küchemann, 1981, dentre vários outros) mostraram que números relativos são de difícil compreensão e que estudantes de 13, 14 e 15 anos ainda apresentam muitas dificuldades em resolver problemas aditivos se estes envolvem números relativos.

A pesquisa aqui relatada buscou um embasamento teórico-metodológico que possibilitasse sondar e intervir em diferentes aspectos do conhecimento de conceitos, em particular o de número inteiro relativo. Partiu-se do pressuposto que a forma como se é levado a pensar em um conceito pode influenciar de tal modo o raciocínio, que o aluno seja ou não capaz de resolver problemas que envolvam tal conceito. Sendo assim, o trabalho aqui relatado se propôs a testar este pressuposto ao manipular variáveis que influenciam o desenvolvimento da compreensão de conceitos. O resultado desta manipulação poderia vir a explicar os resultados aparentemente contraditórios obtidos nos estudos anteriores sobre a compreensão do conceito de número inteiro relativo.

Uma teoria e um método que analisam o desenvolvimento conceitual

Vergnaud (1982) propôs, em sua Teoria dos Campos Conceituais, que o desenvolvimento de conceitos é influenciado por três dimensões: as situações que dão significado aos conceitos, as propriedades invariantes dos conceitos e as representações utilizadas na simbolização do conceito. Dessa forma, ao se avaliar a compreensão de um conceito deve-se observar quais significados do mesmo e quais propriedades estão

sendo sondados e sob quais formas de representação simbólica estão sendo formuladas as questões de sondagem e quais serão utilizadas pelos alunos em suas resoluções dos problemas propostos.

Vários estudos em educação matemática têm observado o efeito das dimensões sugeridas por Vergnaud (1982) na compreensão de conceitos. Estudos anteriores isoladamente examinaram o efeito de significados dados aos conceitos (Carpenter, Hiebert e Moser, 1981; Nunes e Bryant, 1997; dentre outros), o efeito de invariantes conceituais (Riley, Greeno e Heller, 1983; Marthe, 1979; dentre outros) e o efeito de representações simbólicas (Piaget, 1977; Nunes 1992; dentre outros) na resolução de problemas.

Os estudos que investigaram o efeito de significados observaram que o desempenho pode ser diferente na resolução de problemas que requerem a mesma operação aritmética mas que envolvem diferentes significados dados aos números e às operações. Se, por exemplo, para a solução de um problema pode-se utilizar a operação aritmética $25 - 13$, o desempenho dos alunos pode variar se os significados envolvidos no problema forem diferentes. Assim, $25 - 13$ pode corretamente solucionar o problema “Quantas balas Luísa possui se ela ganhou 25 de sua mãe mas deu 13 a suas colegas de classe?”, bem como pode ser a solução de “Quantas balas Luísa possuía antes se após ganhar 13 ela ficou com 25?”. A mesma operação aritmética resolve as duas situações, porém os significados envolvidos são bem diferentes. Na primeira situação, com um maior percentual de sucesso de resolução, o valor desconhecido é o resultado de um decréscimo de um valor inicial dado. Na segunda situação deseja-se determinar o valor inicial sobre o qual uma conhecida transformação ocorreu, resultando num valor final também conhecido. Estudos, como Borba e Santos (1996), têm observado que os desempenhos de alunos são afetados por significados diferentes, com um maior sucesso em problemas com certos significados do que em problemas nos quais a mesma operação aritmética assume outros significados.

Os resultados de estudos sobre o efeito de invariantes no raciocínio de conceitos mostraram que propriedades variam em níveis de entendimento, pois o número de operações mentais que é requerido para a compreensão varia de propriedade a propriedade. A resolução de problemas nos quais pode-se diretamente agir nos números dados, por exemplo, “Quantas balas Luísa possui se ela ganhou 25 de sua mãe mas deu 19 a suas colegas de classe?”, exige um número menor de operações mentais do que problemas que exigem inversões, como, “Quantas balas Luísa possuía antes se após dar 13 ela ficou com 12?”. A segunda situação, embora envolva uma mais simples operação aritmética, $13 + 12$, ou seja, uma adição sem reserva, pode envolver mais operações mentais que a segunda situação que envolve uma operação aritmética mais complexa, $25 - 19$, que exige a decomposição de números. Na segunda situação torna-se necessária alguma ação a mais – como a inversão – do que a ação direta necessária para resolver a primeira situação.

Outros estudos têm evidenciado o efeito de sistemas simbólicos no raciocínio. Se, por exemplo, fomos solicitados a determinar $67 - 19$ oralmente ou por escrito, a forma de representação simbólica utilizada na solução pode levar a diferentes organizações de raciocínio. Por escrito utilizaremos métodos – como a decomposição ou a compensação – para lidar com a necessidade de subtrairmos nove unidades de sete unidades. Já oralmente, uma forma diferente de organização pode ser utilizada. Pode-se no caso de uma solução oral subtrair 20 de 67, obtendo 47 e acrescentar um, já que subtraímos uma unidade a mais que o necessário. Tanto por escrito como oralmente obter-se-ia 48 como resposta mas as organizações da solução variariam de acordo com a forma de representação simbólica utilizada.

A proposta da pesquisa aqui relatada foi utilizar-se da teoria de Vergnaud (1982) e por meio de uma triangulação observar se esta teoria poderia servir de base para explicar os resultados aparentemente contraditórios anteriormente obtidos quanto ao desenvolvimento do conceito de número inteiro relativo. A triangulação consistiu de: 1) uma análise da literatura anterior, à luz da proposta de Vergnaud (1982), 2) estudos experimentais que sondaram os efeitos isolados e de interação de significados, invariantes e representações na compreensão do conceito de inteiro e 3) estudos de intervenção que objetivavam a superação de dificuldades detectadas nos estudos de sondagem.

Objetivava-se, assim, responder às seguintes questões de pesquisa:

Como os diferentes significados dados aos números relativos, as propriedades invariantes deste campo numérico e as representações utilizadas na simbolização de números relativos e de operações com estes números influenciam a compreensão desse conceito antes de sua introdução formal na escola?

Quais significados dados aos números relativos são de mais fácil compreensão antes do ensino formal?

Crianças de sete e oito anos são capazes de gerar espontaneamente ou de aprender a gerar representações explícitas de números relativos?

Antes do ensino formal é possível compreender-se relações diretas e inversas com números relativos?

Analisando estudos anteriores sobre o desenvolvimento da compreensão de números inteiros relativos

A partir da análise de estudos anteriores (tais como Davidson, 1987, Davis, 1990, Bell 1980 e Thompson 1993), observou-se que em algumas pesquisas os participantes haviam demonstrado uma boa compreensão do conceito de número inteiro relativo enquanto que em outras as dificuldades evidenciadas pelos participantes foram muito grandes. Um olhar cuidadoso mostrou que os significados dados aos inteiros relativos nos estudos variava. Naqueles estudos nos quais os inteiros relativos eram *medidas*¹ os participantes foram, em geral, bem sucedidos em suas resoluções de problemas que envolviam este conceito. Quando o significado envolvido era o de *relação*², os desempenhos dos participantes eram muito baixos.

Nos estudos de Davidson (1987) e Davis (1990) crianças bem novas em contextos de jogos evidenciaram um bom conhecimento de números inteiros relativos. Nestes estudos o significado dado ao inteiro relativo era o de medidas. Já nos estudos de Bell (1980) e Thompson (1993) embora não se objetivasse comparar a compreensão dos participantes dos diferentes significados que o inteiro relativo pode possuir, o formato das pesquisas permitiu observar que se o significado de medida era envolvido os participantes tiveram melhor desempenho do que se o significado de relação era envolvido.

Embora a análise destes estudos permitisse inferir que o significado de inteiro relativo enquanto medida é de mais fácil compreensão que o significado de relação, era preciso ainda realizar estudos que intencionalmente variassem os significados dados aos

¹ Alguns exemplos de situações nas quais o inteiro relativo é uma *medida*: temperaturas de objetos ou de cidades acima e abaixo de zero, valores monetários que se possui ou que se deve, altitudes acima e abaixo do nível do mar etc.

² Para os mesmos contextos nos quais os números inteiros podem ser medidas, pode-se ter como exemplos de *relações*: quantos graus a mais ou a menos um objeto ou cidade tem em relação a outro objeto ou cidade, quanto dinheiro se tem a mais ou a menos que outra pessoa, quantos metros a mais ou menos uma localização está situada em relação a outra etc.

inteiros relativos e que controlassem outras variáveis que pudessem interferir no desempenho dos participantes. Este foi, portanto, um dos objetivos dos estudos que serão relatados a seguir.

Quanto às propriedades invariantes, estudos anteriores pareciam evidenciar que a compreensão de problemas aditivos é fortemente afetada se números inteiros relativos estão envolvidos. Num dos estudos anteriores analisados, Marthe (1979), observou-se que em problemas que resultavam em números positivos, que poderiam ser tratados como números naturais, estudantes se saíam melhor que em problemas que resultavam em números negativos, que claramente indicavam a necessidade de lidar com números inteiros relativos. Em se tratando de problemas inversos (com valores iniciais desconhecidos) as dificuldades eram ainda maiores quando inteiros relativos eram envolvidos. Outro objetivo do estudo aqui relatado era o de observar as dificuldades que se tem em lidar com as propriedades envolvidas em problemas inversos com inteiros relativos.

No que diz respeito à influência de representações simbólicas no raciocínio de problemas com inteiros relativos, estudos anteriores também evidenciaram uma forte relação entre o desempenho e o sistema de sinais utilizados. Nunes (1992) realizou dois estudos que objetivavam observar se os diferentes significados dados ao sinal ‘-’ eram igualmente entendidos e se esta duplicidade de significados – o de operação aritmética e de sinal de número – não seriam as maiores dificuldades em se compreender números negativos. Nunes comparou o desempenho dos participantes ao resolverem os problemas oralmente e ao utilizarem representações escritas convencionais e concluiu que o uso do sinal ‘-’ para representar tanto a subtração quanto o número negativo dificultava a resolução de problemas. O estudo aqui relatado buscou ampliar este resultado observando se alunos que ainda não conheciam formas convencionais de se representar números relativos também teriam seus desempenhos afetados pela forma de representação utilizada para resolver problemas com inteiros. Objetivava-se testar a hipótese que as dificuldades representacionais dizem respeito ao uso de representações explícitas dos números relativos e das operações com estes números.

A análise cuidadosa dos estudos anteriormente realizados que envolviam a compreensão do número inteiro relativo parecia, assim, indicar que os desempenhos de alunos em problemas com inteiros relativos são fortemente afetados pelos significados dados aos números e operações, pelas propriedades sobre as quais se raciocina e pelas representações simbólicas utilizadas. Estas tendências, porém, precisavam ser confirmadas por meio de estudos que variassem estes fatores, mantendo os demais constantes. Seria observado se, de fato, compreender o número relativo enquanto medida é mais fácil que compreendê-lo enquanto relação, porquanto este segundo significado exige uma aceitação mais generalizável de relações entre números. Verificaria-se também se problemas inversos com inteiros relativos são de algum modo compreendidos por alunos bem antes da introdução formal a este conceito e se estas são capazes de gerar formas de diferenciar números positivos de negativos e de distinguir os sinais de números e de operações aritméticas.

Dois estudos experimentais que sondaram a compreensão do inteiro relativo antes da introdução formal ao conceito

Participantes

Participaram dos dois estudos de sondagem 120 alunos de sete e oito anos de idade, que foram individualmente entrevistadas. Todos os alunos estavam freqüentando uma de duas escolas de ensino fundamental em Londres, local onde a pesquisa foi

realizada. Os níveis sócio-econômicos dos alunos variavam de modo que se pode verificar se os mesmos efeitos eram observados em diferentes grupos. Os alunos não possuíam nenhum conhecimento formal de inteiros relativos e só estudariam este conceito na escola cerca de quatro anos depois.

Desenhos metodológicos

Estudo 1

Os 60 alunos participantes do primeiro estudo foram randomicamente distribuídas em quatro grupos experimentais, conforme se pode observar na Tabela 1. Metade dos alunos resolveu problemas que resultavam em medidas e metade resolveu problemas que resultavam em relações. Metade dos alunos resolveu os problemas oralmente e metade explicitamente representava os números envolvidos e depois resolvia os problemas. A forma de representação explícita era escolhida pelo participante dentre os materiais colocados à sua disposição: bolas de gude, palitos, fichas coloridas, papel e lápis, canetas coloridas e régua.

Tabela 1. Os grupos experimentais do primeiro estudo.

Significado dado aos números	Forma de representação	
	Implícita (oral)	Explícita (Por escrito ou uso de material manipulativo)
Medida	G1	G2
Relação	G3	G4

Os alunos que resolveram problemas que resultavam em medidas responderam 12 questões sobre um jogo de “Pinball” (Figura 1). Seis destes problemas eram diretos (valor final desconhecido) e seis eram inversos (valor inicial desconhecido).

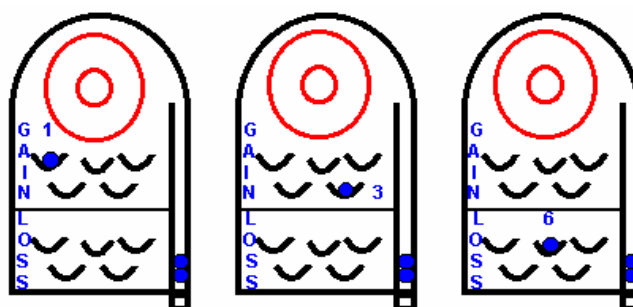


Figura 1. O Pinball.

Os alunos que resolveram problemas que resultavam em relações responderam 12 questões sobre um jogo de bolas de gude que eram colocadas ou retiradas de uma lata (Figura 2). Do mesmo modo que nos problemas sobre medidas, metade dos problemas de relação eram diretos e metade eram inversos.

As questões eram numericamente equivalentes nos dois significados, de modo a controlar quaisquer dificuldades que os participantes poderiam ter em resolver as operações aritméticas envolvidas. Cada um dos 12 problemas envolvia três transformações (número de pontos ganhos/perdidos ou números de bolas colocadas/retiradas da lata). Os problemas foram colocados em ordem de acréscimo de números negativos envolvidos nos problemas.

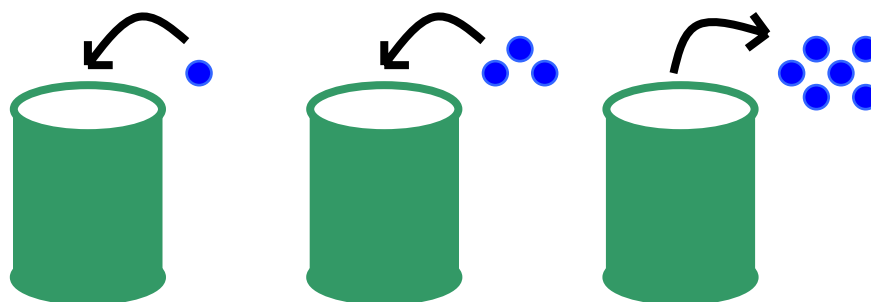


Figura 2. Jogo de bolas na lata.

Nos problemas diretos sobre medidas perguntava-se qual o escore final (positivo ou negativo) de um jogador após ganhar ou perder pontos no “Pinball”. Nos problemas diretos sobre relações perguntava-se se o jogador tinha mais (relação positiva) ou menos (relação negativa) bolas de gude no final do jogo, comparando-se com a quantidade de bolas contidas na lata no início de jogo. Nos problemas inversos a segunda e a terceira transformação e o valor final (medida ou relação) eram dados e perguntava-se quantos pontos (medida positiva ou negativa) o jogador havia marcado na sua primeira jogada.

Estudo 2

O desenho metodológico adotado no segundo estudo era muito semelhante ao do primeiro estudo. Os 60 participantes do segundo estudo foram distribuídos nos mesmos quatro grupos experimentais. A diferença neste segundo estudo foi a de que todas as perguntas foram feitas no contexto do jogo de “Pinball”. O uso de um só contexto tinha como objetivo verificar se o efeito de significados se manteria se os participantes tivessem que responder perguntas sobre o mesmo jogo mas havendo variação no significado dado à resposta obtida. Desta forma buscava-se controlar o efeito diferenciado que cada jogo poderia ter no desempenho dos participantes.

Resultados dos estudos de sondagem

A Tabela 2 e Tabela 3 mostram, respectivamente, as médias de acertos dos participantes dos quatro grupos experimentais no Estudo 1 e no Estudo 2. Observa-se as mesmas tendências nos dois estudos que foram realizados em escolas diferentes e com alunos de meios sócio-econômicos variados. Uma outra observação de destaque é a de que alunos bem antes de serem ensinadas sobre o número inteiro relativo já possuem um certo conhecimento a respeito deste conceito, o que se verifica principalmente nos problemas diretos, sobre o relativo enquanto medida e resolvidos por meio de representações implícitas.

Nos dois estudos de sondagem, tanto o que utilizou dois contextos – um jogo diferente para cada significado dado aos números relativos – quanto o que utilizou um único contexto – o mesmo jogo com os dois significados diferentes – diferenças significativas foram encontradas quanto ao significado dado aos números relativos.

Tabela 2. Desempenho de cada grupo experimental do Estudo 1
(número de respostas corretas dentre seis).

Significado	Representação simbólica	Média	Desvio padrão
		Problemas diretos	
Medida	G1 – Representação implícita	4.40	1.64
	G2 – Representação explícita	2.13	1.60
Relação	G3 – Representação implícita	3.07	1.75
	G4 – Representação explícita	1.93	1.87
Problemas inversos			
Medida	G1- Representação implícita	2.27	2.22
	G2 – Representação explícita	.67	.98
Relação	G3 – Representação implícita	.73	1.10
	G4 – Representação explícita	.33	.72

Tabela 3. Desempenho de cada grupo experimental do Estudo 2
(número de respostas corretas dentre seis).

Significado	Representação simbólica	Média	Desvio padrão
		Problemas diretos	
Medida	G1 – Representação implícita	3.80	1.42
	G2 – Representação explícita	1.73	1.44
Relação	G3 – Representação implícita	2.00	1.41
	G4 – Representação explícita	1.20	1.42
Problemas inversos			
Medida	G1- Representação implícita	1.73	1.16
	G2 – Representação explícita	1.20	1.37
Relação	G3 – Representação implícita	1.33	1.63
	G4 – Representação explícita	.33	.62

Quando os problemas resultavam numa medida os alunos resolveram os problemas com muito maior facilidade do que quando os problemas resultavam em relações. Os alunos tinham dificuldade em reconhecer que poderiam determinar se haviam mais/menos bolas de gude no final do jogo (no Estudo 1) ou mais/menos pontos no final do jogo (no Estudo 2) mesmo não se conhecendo quantas bolas havia na lata no início ou quantos pontos o jogador possuía ao iniciar o jogo. A compreensão de que, mesmo não sabendo quantas bolas havia inicialmente na lata, se teria duas bolas a mais, por exemplo, se duas bolas fossem acrescentadas à lata, não era alcançada pela maioria dos alunos. A mesma falta de compreensão ocorreu quando os alunos tinham que reconhecer que um jogador teria, por exemplo, dois pontos a menos se tivesse perdido dois pontos no jogo, independentemente de seu score inicial no jogo.

As propriedades invariantes também tiveram influência significativa no desempenho dos participantes. Observa-se nos dois estudos que quando os participantes resolveram problemas diretos eles apresentaram um desempenho muito superior ao desempenho mostrado quando os problemas eram inversos. Realizar inversões com números relativos foi muito difícil para a maioria dos alunos.

Para os participantes dos dois estudos de sondagem resolver problemas por meio de uma representação implícita (como a resolução oral na qual não havia necessidade de marcar diferenças entre sinais e operações) foi significativamente mais fácil do que resolver problemas com representação explícita (por meio de representações escritas ou com uso de material manipulativo nas quais havia necessidade de claramente diferenciar sinais e operações). Um grupo pequeno de alunos, porém, foi capaz de gerar formas eficientes de se diferenciar os números positivos dos negativos – separando-os espacialmente (colocando objetos que representavam valores positivos de um lado e os que representavam negativos de outro lado), marcando-os com cartões de cores diferentes ou marcando-os por escrito distintamente (com letras ou outros sinais que diferenciavam os positivos dos negativos).

A partir destes dois estudos de sondagem pode-se confirmar experimentalmente que os desempenhos em problemas envolvendo o conceito de número inteiro relativo são afetados por significados dados a estes números e às operações com estes números, pelas propriedades envolvidas na resolução dos problemas e pelas representações simbólicas utilizadas.

Dois estudos de intervenção que objetivavam auxiliar o desenvolvimento do conceito de inteiro relativo

Havendo detectado precisamente, nos dois estudos de sondagem efetuados, quais aspectos do conceito de número relativo são compreendidos por alunos bem antes de sua introdução formal a este conceito na escola e quais as dificuldades demonstradas, pode-se organizar estudos de intervenção que objetivavam a superação das dificuldades observadas. O primeiro estudo de intervenção objetivava a superação da dificuldade de representar explicitamente os números e de lidar com o significado de inteiro relativo enquanto relação. O segundo estudo visava a superação da dificuldade em lidar com problemas inversos.

Estudo 3

Participantes

Participaram do terceiro estudo 80 alunos de uma escola pública de ensino fundamental em Londres. Esta escola era distinta das escolas nas quais foram realizados os dois estudos anteriores.

Desenho metodológico

Inicialmente os alunos foram individualmente pré-testados. Todos os alunos utilizavam alguma forma de representação explícita (escrita ou por uso de material manipulativo colocado à disposição dos mesmos – lápis e papel, canetas coloridas, bolas de gude, palitos, cartões coloridos e régua), e respondiam seis perguntas sobre medidas e seis sobre relações. A partir dos resultados do pré-teste os alunos foram emparelhadas e distribuídas em cinco grupos, conforme se pode observar na Tabela 4.

Os alunos do primeiro grupo resolveram, usando cartões coloridos, problemas que resultavam em medidas. Os do segundo grupo resolveram, por escrito, problemas que resultavam em medidas. Os do terceiro grupo resolveram, usando cartões coloridos, problemas que resultavam em relações e os do quarto grupo resolveram, por escrito, problemas que resultavam em relações. Os alunos do grupo controle resolveram problemas de multiplicação (correspondência um-a-muitos) de números naturais. Todos os alunos foram testados a segunda vez (pós-teste) no dia seguinte à intervenção.

Todos os problemas resolvidos pelos alunos no pré e pós-teste envolviam seis transformações, diferentemente dos estudos de sondagem nos quais os problemas envolviam três transformações. O aumento do número de transformações objetivava fazer os alunos sentirem a necessidade de gerar formas de explicitamente registrar os números, uma vez que não tinham como controlar e operar mentalmente com tão grande número de transformações.

Tabela 4. Os grupos experimentais do terceiro estudo.

Significado	Forma de representação explícita	
	Uso de cartões coloridos	Por escrito
Medida	G1	G2
Relação	G3	G4
Correspondência um-a-muitos	GC	

A intervenção nos grupos experimentais não objetivava o ensino direto de formas de representar e operar sobre os números mas sim que os alunos desenvolvessem suas formas particulares de registro e operação. Os alunos eram questionados sobre formas de diferenciar números positivos de negativos e de operar sobre as representações geradas. Quanto aos grupos que trabalhavam com o número inteiro como relação, os alunos eram questionados se precisavam necessariamente conhecer valores iniciais para determinarem relações a partir de transformações conhecidas.

Resultados obtidos no primeiro estudo de intervenção

Na Tabela 5 pode-se observar os resultados obtidos no terceiro estudo. Verifica-se nesta tabela que todos os grupos inicialmente apresentavam o mesmo desempenho nos problemas, manipulação obtida por meio de emparelhamento dos participantes nos quatro grupos experimentais e no grupo de controle.

Tabela 5. Desempenho (média de acertos dentre possíveis 12) por grupo experimental no pré e pós-teste do terceiro estudo.

Forma de instrução			
Significado	Representação explícita	Média	Desvio padrão
Pré-teste			
	G1 - Cartões coloridos	1.50	2.63
Medida	G2 – Escrita	1.50	2.39
	G3 - Cartões coloridos	1.50	2.68
Relação	G4 – Escrita	1.50	2.45
Correspondência um-a-muitos	GC - Cartões coloridos	1.50	2.53
Pós-teste			
	G1 - Cartões coloridos	6.75	4.70
Medida	G2 – Escrita	6.56	3.81
	G3 - Cartões coloridos	9.25	4.85
Relação	G4 – Escrita	9.81	4.15
Correspondência um-a-muitos	GC - Cartões coloridos	1.19	2.43

Após uma única sessão de intervenção todos os grupos experimentais apresentaram melhoras de desempenho, e o grupo controle – como esperado – não apresentou melhora significativa de desempenho no pós-teste. Observa-se, porém, que os grupos experimentais que trabalhavam na intervenção com o significado de número mais complexo – ou seja, a compreensão do número inteiro relativo enquanto relação – apresentaram progressos significativamente superiores aos progressos apresentados pelos grupos que trabalharam com o significado de número inteiro enquanto medida.

Quanto às dificuldades de representação explícita, todos os grupos experimentais se beneficiaram da intervenção: os alunos aprenderam a diferenciar números positivos de negativos e a diferenciar sinais de números de sinais de operação aritmética. Aprender a representar os números explicitamente foi fácil para a maioria dos alunos, tanto com uso de material manipulativo como por escrito. Como nas intervenções não se ensinavam aos alunos formas únicas de representação, mas sugeria-se que os mesmos pensassem em formas de diferenciação explícita de números e de operações, os alunos foram capazes de gerar variadas representações com os mesmos materiais.

Uma vez superada a dificuldade representacional, a maioria dos alunos solucionou com muita facilidade os problemas que resultavam em medidas. Embora inicialmente o desempenho nos problemas em que o significado dado aos números relativos era relação foi muito baixo, durante a intervenção a maioria dos alunos conseguiu compreender este significado. Os alunos que discutiram o significado de relação conseguiram no pós-teste resolver problemas de relações e de medidas. Os alunos que discutiram o significado de medida melhoraram no pós-teste apenas nos problemas de medidas.

Estudo 4

Participantes

Participaram do quarto estudo, o segundo estudo de intervenção, 60 alunos da mesma escola pública de ensino fundamental do terceiro grupo. Como o quarto estudo foi realizado posteriormente, os participantes se distinguiam dos do terceiro estudo embora possuíssem a mesma faixa etária e freqüentassem a mesma série escolar.

Desenho metodológico

O quarto estudo tinha o mesmo modelo metodológico do terceiro estudo: pré-teste/ intervenção/pós-teste. As dificuldades a serem trabalhadas neste quarto estudo referiam-se a aprender a representar os números e operações explicitamente (como no primeiro estudo) e aprender a lidar com diferentes propriedades invariantes. No período de intervenção os alunos participaram de um de três grupos: G1: resolveram problemas diretos (final desconhecido) com números relativos; G2: resolveram problemas inversos (inicial desconhecido) com números relativos; e GC (controle): resolveram problemas de multiplicação com números naturais. Todos os três grupos aprenderam a representar os problemas explicitamente.

Apenas um valor inicial e uma transformação eram trabalhados nos problemas. Esta versão simplificada dos problemas objetivava permitir que os alunos refletissem sobre as relações implícitas nos problemas. Nos grupos experimentais os alunos trabalhavam com uma tabela na qual se marcava especialmente as transformações e as medidas finais o que permitia a visualização das alunos de que o valor desconhecido era o inicial.

Resultados obtidos no segundo estudo de intervenção

Os resultados do pré e pós-teste do Estudo 4 podem ser observados na Tabela 6. A partir de desempenhos iniciais similares, obtidos por meio de emparelhamento, os grupos experimentais apresentaram melhoras significativas de desempenho nos problemas diretos do pós-teste.

Tabela 6. Desempenho por grupo experimental no pré- e pós-teste do quarto estudo (média de respostas corretas, dentre possíveis 6).

Forma de instrução		Pré-teste	
		Média	
		(Desvio padrão)	
		Problemas diretos	Problemas inversos
Números inteiros	G1 – Problemas aditivos diretos	1.90 (1.86)	1.30 (1.26)
	G2 – Problemas aditivos inversos	1.90 (1.59)	1.30 (1.22)
Números naturais	GC – Problemas multiplicativos	1.95 (1.05)	1.30 (1.34)
		Pós-teste	
		Média	
		(Desvio padrão)	
		Problemas diretos	Problemas inversos
Números inteiros	G1 – Problemas aditivos diretos	5.45 (.89)	1.65 (1.76)
	G2 – Problemas aditivos inversos	3.20 (2.33)	2.45 (2.16)
Números naturais	GC – Problemas multiplicativos	1.55 (1.28)	1.15 (1.27)

Superada a dificuldade de representar diferentemente números positivos e negativos e de diferenciar o número negativo da operação de subtração, a resolução de problemas diretos ficou bem fácil para muitos dos alunos. Um grupo pequeno de alunos se beneficiou da instrução sobre problemas inversos. O período de intervenção – uma sessão apenas - mostrou-se insuficiente para que os alunos viessem a compreender melhor os problemas inversos. Os alunos que passaram a entender os problemas inversos se beneficiaram da intervenção na qual os valores conhecidos e desconhecidos dos problemas eram marcados em tabelas, marcando explicitamente os valores iniciais desconhecidos, as transformações e os valores finais conhecidos.

Considerações finais:

O conjunto de resultados da presente pesquisa mostrou que o significado de número relativo como medida é de fácil compreensão por alunos muito antes do ensino formal e que eles podem vir a entender facilmente o significado de número relativo como relação. Uma sessão única de intervenção foi suficiente para que os alunos refletissem sobre o significado de número inteiro relativo enquanto relação. Um bom número de alunos percebeu que não é necessário conhecer o valor inicial sobre o qual ocorrem transformações para que se determine se há uma relação positiva ou negativa entre valor final e inicial, se se conhece as transformações intermediárias ocorridas.

Alguns alunos são capazes de espontaneamente gerar representações explícitas de números relativos e muitos podem, a partir de breve discussão, aprender a gerar representações com material manipulativo e por escrito. Este é um fato surpreendente, considerando-se que os alunos pesquisados desconheciam formas convencionais de se representar números relativos.

A dificuldade dos alunos em lidar com problemas inversos – nos quais os valores iniciais são desconhecidos – é um alerta sobre a necessidade de discutir bem este tipo de problema – tanto com números naturais como com números relativos. Determinar medidas iniciais a partir de transformações dadas e valores finais obtidos, não é tarefa fácil para a maioria dos alunos e esta constatação deve levar a um maior cuidado com este tipo de problema aditivo em sala de aula.

O sucesso das intervenções que partiram de aspectos de mais difícil compreensão e que trabalharam mais de uma dificuldade por vez sugere importantes implicações educacionais. Não é necessário que o ensino se dê dos elementos mais fáceis na direção dos mais difíceis para que haja aprendizagem e pode-se trabalhar múltiplas dimensões dos conceitos simultaneamente.

Os alunos, quando iniciam a aprendizagem formal de números relativos já possuem conhecimentos em algumas dimensões deste conceito. Torna-se necessário investigar quais aspectos já são compreendidos e quais requerem maior atenção quando do ensino formal. O uso de instrumentos de avaliação nos quais se tem claros os objetos de conhecimento sondados e os objetivos de cada questão, pode auxiliar os professores num melhor diagnóstico dos conhecimentos iniciais de seus alunos, das dificuldades que persistem após o ensino e de quais aspectos dos conceitos merecem especial atenção em sala de aula.

Referências:

- Bell, A. (1980). Developmental studies in the additive composition of numbers. *Recherches en didactique des mathématiques, 1*, 113-141.
- Borba, R. & Santos, R. (1996). Investigando a resolução de problemas de estruturas aditivas com crianças de terceira série. *Anais da 19ª ANPEd*, Caxambu.
- Carpenter, T., Hiebert, J. & Moser, J. (1981). Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 27-39.
- Davidson, P. (1987). How should non-positive integers be introduced in elementary mathematics? In J.C. Bergeran, Herscovics, N. & Kieran, C. (Eds.), *Proceedings of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Montreal, Canadá: 430 –436.
- Davis, R. (1990). Discovery learning and constructivism. In R. Davis, C. Maher & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. Monograph 4, Journal for Research in Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gallardo, A. & Rojano, T. (1992). The status of negative numbers in the solving process of algebraic equations. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the XVI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, New Hampshire, Durham (USA): 161.
- Küchemann (1981). Positive and negative numbers. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray: 82-87.
- Marthe, P. (1979). Additive problems and directed numbers. In D. Tall (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Warwick, England.
- Nunes, T. (1992). Cognitive invariants and cultural variation in mathematical concepts. *Journal of Behavioral Development, 15 (4)*, 433 – 453.
- Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Oxford: Blackwell Publishers.
- Piaget, J. (1977). *The grasp of consciousness: Action and concept in the young child*. London: Routledge and Kegan Paul.
- Riley, M., Greeno, J. & Heller, J. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press, 153-96.
- Thompson, P. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 165 – 208.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 39 – 59; 141-161.