# ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADOS ÀS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DO CONCEITO DE DERIVADA POR ESTUDANTES DE CURSOS DE EXATAS.

**IGLIORI,** Sonia **–** PUC/SP
**GODOY,** Luiz Felipe **–** PUC/SP
**GT:** Educação Matemática / n.19
**Agência Financiadora:** Não contou com financiamento

Resumo

Este artigo é resultado de uma pesquisa diagnóstica realizada com o objetivo de investigar significados atribuídos, por estudantes universitários que estudaram derivada num curso de Cálculo I, às representações semióticas desse conceito.

O referencial teórico da pesquisa foi a teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval (1995). Essa teoria trata do desenvolvimento do funcionamento do pensamento humano, segundo a qual, um indivíduo para aprender um conceito científico precisa fazer distinção entre a **representação semiótica de um objeto matemático e ele próprio** e esse indivíduo somente tem acesso a esse conceito por meio das representações, daí o papel essencial, nessa teoria, da atribuição de significados às representações de um conceito científico no processo do ensino-aprendizagem do mesmo.

Os dados para a realização do diagnóstico foram colhidos por meio de testes, os quais foram aplicados a 168 estudantes, sendo 78 do segundo ano de um curso de Engenharia e o restante de um curso de formação de professores de matemática.

As conclusões foram elaboradas a partir de análises qualitativas e quantitativas dos dados e, indicaram que os estudantes atribuem significados muitas vezes não adequados às representações semióticas do conceito de derivada, indicando uma causa de dificuldades para a compreensão do mesmo.

**Palavras Chave:** Representação Semiótica; Significado; Derivada.

## APRESENTAÇÃO

A teoria dos registros de representação desenvolvida por Raymond Duval propugna que, para o desenvolvimento do funcionamento do pensamento de um indivíduo na aquisição de um conhecimento matemático se faz necessário tanto distinguir uma noção científica, ela mesma, dos registros semióticos que a representam, quanto conhecer a "funcionalidade" desses registros. Nela é destacado que é indispensável considerar, no funcionamento cognitivo do pensamento humano, dois importantes tipos de aquisições funcionais: as aquisições funcionais relativas aos sistemas orgânicos, disponíveis a ele desde seu nascimento, como a audição, a visão, o tato e a memória e, as aquisições funcionais relativas aos sistemas semióticos, estes últimos usados para se comunicar, mas também para organizar e tratar as informações.

Na perspectiva dessa teoria, numa atividade de aquisição de conhecimento matemático, há que ser levados em conta dois componentes distintos: os próprios conteúdos desse conhecimento, nos quais há métodos e processos para descobrir, estabelecer e validar resultados e, o cognitivo que envolve os processos pelos quais o indivíduo tem acesso aos conhecimentos, ambos fundamentais para a compreensão na aprendizagem. É relativamente ao segundo componente, o cognitivo, que, segundo Duval (1999), a identificação de uma noção matemática com seus registros de representação semióticos, meios que possibilitam o acesso a ela, pode constituir-se num dos problemas centrais da aprendizagem dessa noção. Um registro de representação semiótico de um objeto matemático pode ser simbólico, figural ou a língua natural. Cada tipo de registro traz consigo um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ele foi produzido. A apreensão das características diferentes dos registros só será efetiva quando o indivíduo que aprende atingir o estágio de capacidade em efetuar tratamentos (operações internas a um mesmo registro) e conversões (passagem de um registro a outro) e de atribuição aos registros o significado adequado de representar "alguma coisa".

Na teoria de Duval é admitido ser próprio da atividade matemática, mobilizar simultânea ou alternadamente vários registros de representação semiótica e, ser essa ação de grande importância para o ensino e a aprendizagem da matemática. A mobilização de registros envolve dois tipos radicalmente diferentes de transformação dos mesmos: os tratamentos e as conversões.

"*Os tratamentos são as transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações;*

*completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria." (MACHADO*, 2003 p. 16).

**Exemplo1: Dada** $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (2x - 3)$ **, determinar o valor de** $f´(a)$**. É necessário realizar <u>tratamentos</u>, ou seja, transformações no interior de um mesmo registro, (no caso o simbólico), para se chegar à resposta. Os tratamentos são expressos pelas passagens abaixo:**

$$f'(x) = (x^2 + 1) \cdot 2 + (2x - 3) \cdot 2x$$

$$f'(x) = 2x^2 + 2 + 4x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 2$$

$$f'(a) = 6.a^2 - 6a + 2$$

*As conversões são as transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.* (MACHADO, 2003, p. 16).

A conversão não é um processo puramente conceitual, envolve o fenômeno de congruência ou não congruência. Diz-se que, na conversão, ocorreu um fenômeno de congruência, quando a passagem de um registro (RS, registro de saída) a outro, ocorreu (RCH, registro de chegada) de forma natural, isto é, a representação do registro de saída é transparente à representação no registro de chegada (Exemplo 2). E, quando o registro de saída impõe maior dificuldade para pensar ou visualizar a representação do registro de chegada, diz-se, então, que na conversão ocorreu um fenômeno de não-congruência (Exemplo 3).

**Exemplo 2: Fenômeno de Congruência na conversão do registro simbólico (RS) para o registro da língua natural (RCH).**

(RS) $\frac{dy}{dx}(a)$ $\Longrightarrow$ Derivada de y em relação à x no ponto *a* (RCH)

**Exemplo 3: Fenômeno de Não-congruência na conversão do registro simbólico (RS) para o registro da língua natural (RCH).**

3.1(RS) $f'(a) \Rightarrow$ Coeficiente angular da reta tangente à curva de função $f$ no ponto de abscissa $a$ (RCH)

*3.2* (RS) $\lim_{x \longrightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ $\Longrightarrow$ Derivada da função $f$ no ponto p (RCH)

Na matemática, os fenômenos de não-congruência são mais comuns que os de congruência. A aprendizagem requer uma coordenação dos distintos registros de representação que um domínio de conhecimento mobiliza e, é imprescindível que se realizem conversões nos dois sentidos, havendo congruência ou não.

Segundo a teoria dos registros de representação é fundamental para aprendizagem de conceitos matemáticos, como a derivada, levar em conta a relação entre representação e objeto a ser representado. Algumas pesquisas têm sido norteadas por esta teoria quando se trata de investigar causas de dificuldades na aprendizagem do conceito de derivada. Este é o caso da pesquisa de Praslon (2000), para citar um exemplo, em que é investigado o processo de ensino e aprendizagem da noção de derivada na transição do ensino médio para os primeiros anos da universidade, na França. Nessa pesquisa são analisados os efeitos na aprendizagem da noção de derivada, dos tratamentos e conversões entre registros: algébrico, gráfico, numérico e língua natural. Os registros foram ainda classificados em "registros dominantes", "registros secundários", "registros minoritários" segundo a importância dos tratamentos e conversões nos enunciados das questões ou em suas soluções. Foram analisados os tipos de conversões entre registros realizados nos exercícios dos livros e manuais didáticos adotados nas escolas francesas de ensino médio. Praslon chama a atenção para o fato de que as conversões, necessárias para o acesso ao conceito, são com muita freqüência solicitadas explicitamente nos textos, mas, em poucos casos elas ficam a cargo dos alunos, indicando com isso que realizar conversões não são consideradas como relevantes para a aprendizagem. Diz ele: "*as conversões entre os registros de representação de derivada não são solicitadas como meio de reduzir as* *dificuldades particulares encontradas no registro de origem para resolver um problema dado, mas, simplesmente para traduzir um resultado já obtido". Por exemplo, exige-se que o aluno saiba interpretar graficamente uma propriedade que ele acaba de estabelecer no registro algébrico, em termos de posição relativa curva/tangente, tangente vertical, inclinação (positiva ou negativa) da reta tangente, etc. O que ocorre é que estas interpretações são em geral sugeridas pelos enunciados.* (Praslon, 2000, p.36)

Praslon estudou as relações entre representação e objeto representado, no caso a derivada, a partir da classificação geral dos registros: simbólica, figural ou língua natural, sem especificar quais eram esses registros. Nesta pesquisa o estudo foi feito a partir de registros específicos de derivada em cada categoria da classificação geral.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa foi desenvolvida adotando-se os seguintes procedimentos: a) definição do critério de escolha dos sujeitos b) revisão de literatura c) seleção de livros didáticos b) análise de livros c) elaboração dos testes diagnósticos d) definição da abordagem para a aplicação dos testes e) aplicação dos testes g) categorização dos dados h) análise dos dados.

a) Os estudantes, sujeitos da pesquisa, foram aqueles que já tinham passado por um curso de Cálculo e estudado derivada. O critério de escolha se justifica, pois para investigar significados atribuídos a um conceito é necessário que se tenha vivenciado de alguma forma experiências com esse conceito e suas representações. O número do público alvo da pesquisa, 168 estudantes para o primeiro teste e 32 para o segundo, foi definido assim: para o primeiro teste o total dos estudantes dos cursos selecionados. E, para o segundo, selecionou-se aqueles que tiveram maior número de acertos no primeiro teste e que mostraram disponibilidade para resolver o segundo.

b) Para efetuar revisão da literatura buscou-se dissertações e teses defendidas no país e no exterior e artigos. Foram selecionados para análise, por tratarem de tema similar, 9 dissertações de mestrado nacionais, 1 tese de doutorado nacional, 2 teses de doutorado estrangeiras, 2 artigos de autores nacionais e 1 estrangeiro. O objetivo da análise foi avaliar a pertinência da pesquisa e conhecer os resultados já obtidos. Há que se registrar que uma tese, a de Praslon tratou o tema na mesma abordagem teórica e serviu de confrontação com os resultados desta pesquisa. Os demais trabalhos, com outros referenciais teóricos auxiliaram na preparação dos testes e na análise dos dados. Destaque para a dissertação de Meyer. (2003)

c) Os livros didáticos foram escolhidos entre aqueles adotados por professores dos cursos pesquisados e que eram de maior preferência entre outros professores do país. As informações foram obtidas por meio de entrevistas a seis professores dos cursos e por respostas a consulta feita por e-mail, de 18 professores num total de 120 de diversas partes do país. Foram selecionados para a análise 2 livros de autores nacionais e 2 de autores estrangeiros.

d) A análise dos livros objetivou avaliar como eram articulados os registros de derivada em teoria e nos exercícios e subsidiou uma compilação dos registros de uso mais freqüente.

e) Dois testes foram elaborados, um em complemento do outro. As questões do primeiro teste objetivaram diagnosticar significados atribuídos aos registros e a capacidade dos estudantes de realizar conversões e tratamentos; as do segundo tiveram os mesmos objetivos do primeiro e foram preparadas de modo contextualizado para possibilitar um refinamento do diagnóstico.

f) A aplicação dos testes ocorreu em situação de aula normal, com a duração de uma aula para o primeiro teste e 2 aulas para o segundo. Em ambas as aplicações o professor da classe e um pesquisador estiveram presentes. Na aplicação do primeiro teste a estratégia foi a de distribuir uma folha com as duas primeiras questões, e, após a devolução desta, uma outra folha com as duas últimas. Esta estratégia foi utilizada para garantir que os estudantes resolvessem as questões na lógica de preparação das mesmas e para evitar possível interferência dos enunciados das primeiras na resolução das últimas, o que não era desejável.

g) Os dados foram categorizados pelos significados atribuídos e pelos tipos de registros utilizados nas respostas.

h) As análises qualitativas foram complementadas com dados quantitativos.

**Registros de representação da derivada de uma função ou, do valor numérico da derivada de uma função num ponto (mais freqüentes nos livros didáticos analisados) segundo as categorias da representação semiótica: língua natural, simbólica e figural.**

**<u>Língua Natural</u>**

–Derivada da função f num ponto x

–Tangente do ângulo formado (no sentido anti-horário) entre o eixo horizontal x e a reta t (tangente à curva)

–Função derivada

–Derivada de uma função num ponto

–Derivada de y em relação à x

–Taxa instantânea de variação de y em relação à x

–Coeficiente angular da reta tangente a uma curva.

–Limite da razão incremental

–Limite da variação de y em relação à variação de x, quando a variação de x tende a zero

–Derivada primeira

–Inclinação da reta tangente à curva no ponto de abscissa $x = a$

–Derivada de y em relação à x no ponto de abscissa $x = a$

– Coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função

–Taxa instantânea de variação de y em relação à x no ponto $x_0$

– Coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f num ponto de abscissa *a*

**<u>Simbólico/ Algébrico</u>**

$f'(x)$; $tg\alpha$; $D_x y$; $y'$; $\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{d}{dx} f(x)$; $D_x f(x)$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

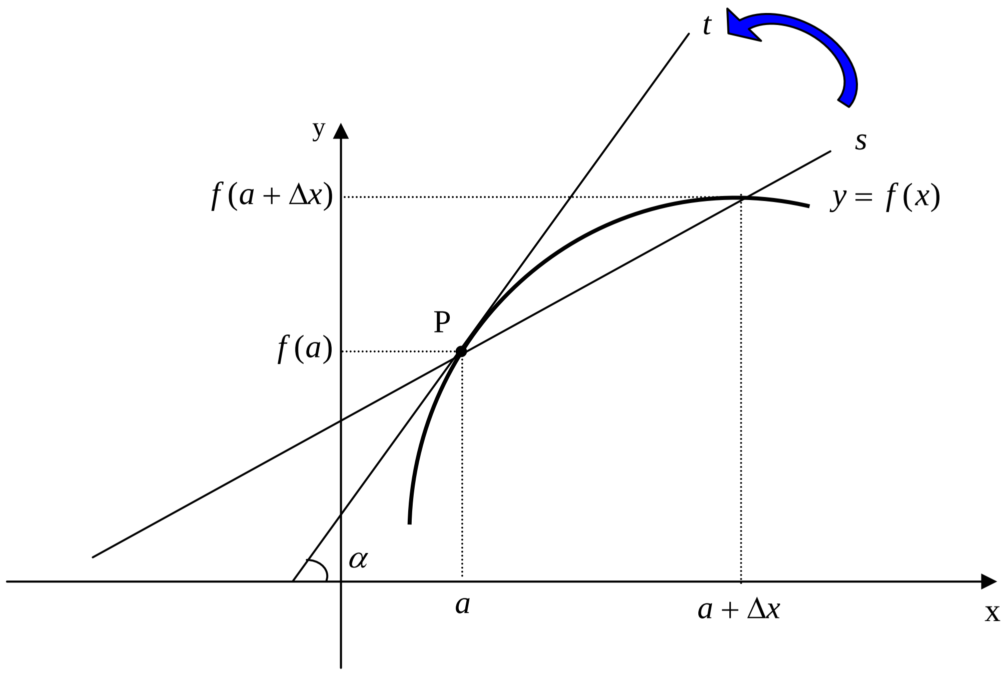
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(a+x) - f(a)}{x}$; $f'(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; $y'(a)$;

$\dfrac{dy}{dx}(a)$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

**<u>Simbólico Algébrico/ Numérico:</u>**

$$f'(2) = 4\,; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 4\,; \quad y'(2) = 4\,; \quad \lim_{xx \to 0} \frac{f(2+x) - f(2)}{x} = 4$$

**Figural**




$s$ : reta secante à curva $y = f(x)$

$t$ : reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $\mathrm{P}(a, f(a))$

**O 1º TESTE**

**1ª Questão:** Qual o significado dos seguintes símbolos? Responda por uma frase ou graficamente.

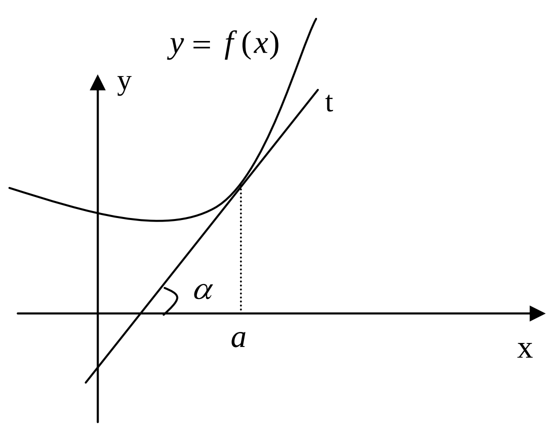
a) $\dfrac{df}{dx}(a)$

b) $f'(a)$

c) $\lim_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

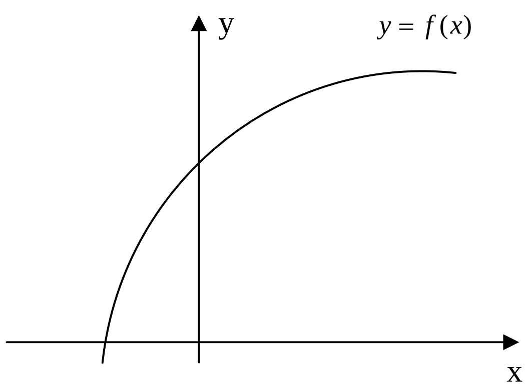
Com esta questão objetivou-se avaliar se o estudante consegue passar do registro simbólico/algébrico para o registro gráfico (figural) ou língua natural, quando o conceito representado é o valor da derivada de uma função num ponto.

**2ª questão:** No sistema de eixos abaixo estão indicados: o gráfico da função $f$ e a reta $t$ tangente a esse gráfico no ponto de abscissa $a$. Que significado você atribui à tangente do ângulo $\alpha$?



Com esta questão buscou-se investigar se o estudante identifica o conceito de derivada num problema em que os dados são apresentados na representação figural e, em caso que apresente resposta, avaliar qual o registro de derivada que ele utiliza.

**3ª Questão:** Qual o valor de $f'(x)$, se x é um ponto fixado no eixo horizontal?




A segunda e a terceira questões têm por objetivo analisar se o aluno identifica o conceito de derivada a partir de uma situação dada na representação figural (gráfica).

**4ª Questão:**

a) O que é derivada de uma função $f$ num ponto $a$?

b) O que é taxa de variação instantânea de uma função num ponto $a$?

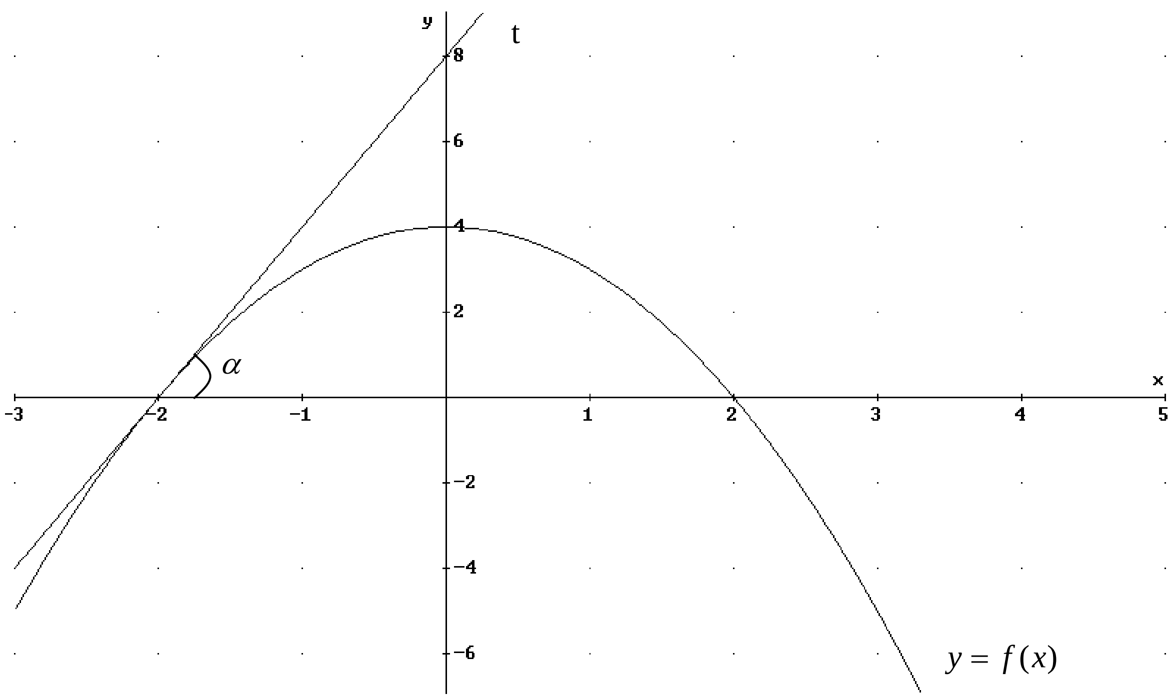
c) Qual é a sua interpretação para o coeficiente angular de uma reta tangente t ao gráfico de uma função f num ponto de abscissa a?

Na quarta questão possibilitou-se ao estudante a apresentação de resposta no registro que lhe fosse mais familiar objetivando-se investigar quais eram os registros mais freqüentemente utilizados. E, também investigar os significados atribuídos à derivada de uma função num ponto dado, representada num mesmo registro, a língua natural, tendo sido contemplado sua diversidade interna, ou seja, várias representações no interior do mesmo registro.

No primeiro teste buscou-se colocar o estudante frente a situações em que seja necessário realizar conversões nos dois sentidos possíveis, na primeira questão o sentido da conversão é simbólico/língua natural, na segunda figural/simbólico ou figural/língua natural e na quarta nos sentidos língua natural/simbólico ou língua natural/figural.

**O 2º TESTE**

**Questão 1**: A reta t é tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto (-2,0).



a) Encontre a equação da reta t.

b) Informe qual o sinal de $f'(-2)$.

c) Encontre $\dfrac{df(-2)}{dx}$

d) Determine o valor da $tg\alpha$.

**Questão 2:** A função $f(x) = -x^2 + 4$ expressa a lei do movimento de um projétil P (f é representada graficamente na questão 1). Encontre:

a) $f'(-2)$

b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$

c) $\dfrac{df(a)}{dx}$, sendo a = -2

d) Qual a velocidade do projétil P no ponto (-2, 0)?

**Questão 3:** Numa granja experimental, constatou-se que uma ave em desenvolvimento tem sua massa, medida em gramas, dada pela seguinte função:

$M(t) = \dfrac{t^2}{2} + 4t + 28$ para $0 \le t \le 60$ $t$, número de dias.

a) Qual a razão média de variação da massa da ave, para $0 \le t \le 60$?

b) Qual a variação da massa desta ave após 50 dias?

c) Qual a taxa de variação da massa desta ave no 50º dia?

d) Qual o valor de $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{M(50+t) - M(50)}{t}$

e) Qual o valor de $\left.\dfrac{dM}{dt}\right|_{t=50}$

## ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 1ª Teste

Na 1ª questão – *item a*, a maioria dos sujeitos pesquisados, converteu o registro de representação simbólico de derivada de uma função num ponto para o registro de língua natural. Pode-se detectar nas respostas dos estudantes o uso de uma diversidade de representações no interior do registro da língua natural, algumas revelando a atribuição de significados não adequados. Eis alguns dos significados: "*Derivada primeira de "a"; Derivada de f em relação à derivada de x; "Função derivada*." (tabela 1; anexo-I); "*Derivada de f em relação à x; Derivada primeira de f; Derivada de uma função.*"
(tabela 1; anexo-I).

Uma das confusões mais freqüentes revelada pelos significados atribuídos: identificação entre o valor da derivada de uma função num ponto e a função derivada. Esta dificuldade fica mais explícita quando a resposta era ***"função derivada".***
O índice de acertos na realização de conversão do registro simbólico para o registro de língua natural apresentado no *item a* ficou aquém do esperado. Pelos exercícios apresentados nos livros, previu-se que haveria um número mais expressivo de respostas no registro: **"**taxa de variação instantânea no ponto a" e "coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto de abscissa a**"**. A conversão para o registro figural não ocorreu, o que pode ser um indicativo de que a ocorrência do fenômeno da não congruência na conversão (simbólico/figural) acarrete maior dificuldade.

Nas respostas encontradas para o *item b*, chamou a atenção que os registros na língua natural: **"***derivada primeira de a***"** e **"***derivada 1ª de f***"** ocorreram com maior freqüência entre os alunos do curso de engenharia elétrica que estavam estudando ou já estudaram derivada de ordens superiores. Neste item observou-se em 12,7% das respostas confusão entre o valor numérico da função derivada com a função derivada.

As respostas ao *item c* da 1ª questão mostraram que o registro de representação simbólico foi preferencialmente convertido para o registro de representação da língua natural, porém quase 70% dos estudantes que responderam a esta questão, expressaram-no como *o limite de uma função* sem nenhuma referência à derivada de uma função num ponto. Houve uma pequena porcentagem dos estudantes que corresponderam ao que foi esperado, utilizaram o registro de representação da língua natural: aproximadamente 10 % responderam **“***inclinação da reta tangente à curva no ponto a***”** e outros 10 % **“**derivada da função num determinado ponto**”** (tabela 1; anexo-I).

Para responder a 2ª questão, os estudantes efetivaram conversão para o registro da língua natural e para o registro simbólico. Foram nas respostas a essa questão que houve a utilização de maior diversidade de representações em todo o teste. O que levou a conclusão de que a conversão no sentido registro figural/outro registro ocorreu mais espontaneamente que nos contrários. 48,8% dos estudantes que participaram do teste, responderam a esta questão, porcentual menor apenas do que o daqueles que responderam o *item a* da 1ª questão (tabela 2; anexo-I). Esse fato conflita com o que é mencionado por Duval, de que uma conversão que tem para registro de saída o figural causa maior dificuldade aos estudantes do que aquela em que esse registro é o registro de chegada. Atribuiu-se a este resultado o fato de tratar-se do registro específico da derivada, pois a primeira apresentação desse conceito, era feita nos livros didáticos analisados, pela interpretação geométrica.

Cerca de 65% dos sujeitos pesquisados não responderam a 3ª questão, o que indicou que a conversão do registro simbólico para o registro figural foi para esse grupo de alunos, a conversão que apresentou maior dificuldade.

É interessante ressaltar que a 3ª questão apresenta uma proposta de conversão no sentido inverso daquele considerado na 2ª questão, isto é, enquanto na 2ª questão o registro de representação de partida é o figural, na 3ª questão o registro de partida é o simbólico, e a expectativa dos pesquisadores era que o estudante apresentasse a resposta no registro figural, devido ao que é sugerido na apresentação da questão.

Destacou-se na análise da 2ª questão um bom índice de acerto; em contrapartida, na 3ª questão em que se pretendia uma conversão no sentido oposto, verificou-se insucesso nas resoluções e um reduzido número de respostas.

Em respostas para a 3ª questão identificou-se a atribuição do significado a $f^{'}(x)$ como sendo a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ num ponto de abscissa x (tabela 3; anexo-I). Esse significado foi discutido por Meyer (2003), quando o detectou em elementos da *imagem conceitual* de estudantes relativamente ao conceito de derivada, quando interpretada geometricamente.

20 % dos que responderam a esta questão atribuíram de forma idêntica um mesmo significado a uma representação de modo não consistente com o conceito representado (tabela 3; anexo-I), a representação simbólica $f'(x)$ tomada como a representação simbólica da função derivada. Vale destacar que nos livros analisados $f'(x)$ representa o valor da função derivada de $f$ num ponto de abscissa $x$.

As respostas para o *item a* da 4ª foram mais freqüentes apresentadas no registro da língua natural com: **“***inclinação da reta tangente à curva no ponto a***”**, **“***coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto a”* e *“taxa de variação da função no ponto a”*. Nesse item notou-se que a equação da reta tangente à curva, algumas vezes, é concebida como sendo a derivada de uma função num ponto (tabela 4; anexo-I), significado esse também observado na 3ª questão. Embora tenha aparecido em menor número, aproximadamente 18% das soluções foram apresentadas no registro de representação simbólica (tabela 4; anexo-I)

Foi para o *item b* da 4ª questão que se obteve menor número de respostas, entre essas 75% foram dadas no registro da língua natural e 25% no registro simbólico (tabela 4; anexo-I), não aparecendo nenhum caso de conversão para o registro de língua figural.

Nas respostas dadas ao *item c*, da questão 4, encontrou-se a maior diversidade de representações no interior de um mesmo registro ou seja no registro da língua natural. Percebeu-se por essas respostas, a confusão existente entre coeficiente angular da reta tangente e o ângulo formado pela tangente e o eixo do x (tabela 5; anexo-I). Houve algumas respostas no registro simbólico (4,6%) e também algumas no registro de representação figural (11,4%); aliás, este foi o único item em que os sujeitos pesquisados utilizaram a conversão do registro de língua natural para o registro figural, o que nos levou a supor que o termo “ao gráfico” utilizado na questão tenha favorecido esta conversão.

Considerando todas as questões, o registro da língua natural foi o mais mobilizado pelos estudantes; neste registro observou-se que a representação do conceito de derivada (ou do valor da derivada num ponto) que se inicia por “derivada da função...” é seguramente a mais utilizada. O registro menos utilizado em respostas foi o figural. Neste registro também se encontra o maior porcentual de erro nas respostas.

**2º Teste**

47% das repostas ao item *a* da questão foram corretas. A maioria dentre essas foi obtida pela equação da reta por dois pontos. (Figura 1 – Anexo II) 12% dos estudantes determinaram o coeficiente angular como a tangente trigonométrica do ângulo $\alpha$ e apenas um determinou a equação da reta t através do cálculo do determinante da matriz real formada pelos pontos pertencentes à reta t.

Os sujeitos que encontraram a equação da reta tangente por meio da equação da reta por dois pontos (escrita na lousa) não tiveram em geral sucesso na resposta aos itens *b* e *c* da questão 1. Esses resultados indicaram que havia dificuldade aos estudantes para atribuir significado às representações simbólicas da derivada de uma função num ponto

Os estudantes que determinaram o coeficiente angular da reta t a partir da tangente trigonométrica do ângulo $\alpha$ tiveram maior êxito para responder os itens seqüentes, relacionando o valor encontrado para o coeficiente angular com as representações simbólicas de derivada num ponto. Porém, como foi antecipado por *análise a priori*, boa parte desses estudantes encontrou o valor negativo, $tg\alpha = -4$, utilizando esse valor para responder os itens *a*, *b* e *c*, sem relacionar o sinal da derivada com o crescimento da função.

É importante observar que, os estudantes fizeram associação entre os registros simbólicos tg $\alpha$ e aqueles, também simbólicos, de derivada num ponto, sem, no entanto, atribuir significado a essas representações. (Figura 2 – Anexo II)

Quase a metade desses estudantes que determinaram corretamente a equação da reta t e determinaram o sinal de $f^{'}(-2)$ substituindo $x = -2$ na equação da reta encontrada no *item*. **(**Figura 3 – Anexo II). Nessa substituição, encontram zero para o valor da derivada, indicando não associar esse zero com o de inclinação nula para a reta tangente, pois o ponto em questão não é extremo local da função. A atribuição do significado de função derivada para a equação da reta tangente foi identificada em outras pesquisas como a de Meyer (2003) e a de Cassol (1998). Os estudantes determinaram corretamente o valor da $tg\alpha$ (item d) mas, não atribuíram a ele o significado de derivada da função num ponto; nem ao coeficiente angular, visto que determinaram corretamente o coeficiente angular para determinar a equação da reta t (*item a*) e também o valor da $tg\alpha$ (*item d*), mas não acertaram os *itens c* e *d* .

9% dos sujeitos pesquisados, adotaram um procedimento de resolução não previsto para os *itens b* e *d*. Consideraram a ordenada $y = 0$ do ponto de tangência como $f'(-2)$. Esse procedimento está aqui ressaltado, mesmo sendo de um número não significativo de sujeitos, pois atribuir à ordenada do ponto de tangência o valor da derivada foi categorizado em pesquisas como uma concepção. Meyer (2003, pg. 33)
(Figura 4 – Anexo II)

15% dos estudantes que não apresentaram reposta correta para o item *a* da questão 1, informaram que, apesar de a equação geral da reta ter sido colocada na lousa, não sabiam determinar a equação da reta e, por isso, não tinham como achar a derivada no *item b* e *c*, isto possibilita inferir que, os mesmos, atribuem à equação da reta tangente t o significado de derivada de $f$.

Dos (47%) dos estudantes que acertaram o item *a*, 40% responderam corretamente aos itens *b* e *d*, porém não responderam corretamente (ou não responderam) o item c; isto indica que estes alunos não atribuem à representação simbólica $\frac{df(-2)}{dx}$ um significado compatível com o conceito representado.

Apenas 9% dos estudantes utilizaram as respostas da questão 1, para responder aos itens da questão 2.

O maior porcentual de acertos 60% ocorreu nas respostas ao item *a*, o que foi previsto na análise *a priori*.

16% dos alunos apresentaram resposta correta para o *item b* e, apenas 9% deles identificaram os dois registros simbólicos dados nos itens a e b, apresentando como resposta para o item *b* a mesma encontrada no item *a*. 7% calcularam corretamente o limite, mas pela técnica operatória, podendo esse fato ser interpretado como não atribuição do significado de derivada da função num ponto ao registro simbólico. O mesmo pode ser dito para 81% dos estudantes, que tentaram resolver o limite com o mesmo procedimento de técnicas operatórias e não foram bem sucedidos e, também para os 3% que não resolveram a questão proposta nesse item. **(**Figura 5 – Anexo II)

Para o *item c* houve 38% de respostas corretas. 13% escreveram: $\frac{df(-2)}{dx} = f'(-2) = 4$ e 25% não aproveitaram os cálculos realizados para o item *a*.

No *item d* foram 50% de acertos, dos quais 41% calcularam novamente a derivada da função $f$ e determinaram o seu valor para $x = -2$; apenas 9% colocaram $v(-2) = f'(-2) = 4$ resolvendo a questão como o esperado.

Na 3ª questão, 91% dos estudantes tentaram resolver algum dos itens. 9% acertaram o item *a*. Neste item, outros 9% confundiram razão média de variação da massa (taxa de variação média) com a variação da massa no mesmo intervalo.
(Figura 6 – Anexo II)

Para o *item b*, apenas 12% das respostas foram corretas.

47% dos alunos não responderam corretamente ao *item c*. 19% determinaram o valor da massa da ave no qüinquagésimo dia, isto é, substituíram t por 50, os outros 28% se perderam na aplicação das regras para a obtenção da função derivada.

Apesar de erros operatórios, o porcentual de acertos, 53%, para o item *c*, indicou que maioria dos estudantes pode atribuir o significado de derivada de uma função num ponto à taxa de variação instantânea, se representado no registro da língua natural.

Como já esperado na análise *a priori*, apenas 13% dos alunos acertaram o item *d* e entre eles apenas 9% atribuíram ao limite o significado de variação instantânea, eles mostraram a identificação entre os itens *c* e *d* escrevendo: $\lim_{t \to 50} \frac{M(50+t) - M(50)}{t} = M'(50) = 54$ g / dia, 4% obtiveram o limite por procedimentos operatórios de modo correto, 44% cometeram erros nesse procedimento e, o restante não resolveu.

41% dos estudantes responderam corretamente ao item *e* apresentando a resposta da seguinte forma: $\left.\frac{dM}{dt}\right|_{t=50} = M'(t) = 54$ *g / dia*

**Conclusões**

A análise dos dados possibilita inferir que o desenvolvimento da capacidade de articular registros de representação do conceito de derivada com vistas à atribuição dos significados a esses registros é importante para o desenvolvimento do pensamento na aprendizagem. Para tanto é necessário que se disponha ao sujeito que aprende diversas situações didáticas que o favoreça. A articulação de registros e a busca da atribuição de significados ao conceito de derivada foram pouco exploradas nos exercícios dos livros analisados. Outra conclusão que se pode extrair da análise dos dados é que o fato de um estudante ter habilidade para efetivar conversão entre dois dos registros de um conceito parecer não garantir que ele mobilize conjuntamente seus significados. O que é indicado na comparação entre os índices de acerto de questões similares dos dois testes, especificamente a questão 4 - item b do 1º teste: *"O que é taxa de variação instantânea de uma função num ponto a?"* (anexo-I) com a questão 3 - item c - 2º teste: *"Qual a taxa de variação da massa desta ave no* $50^0$*?"*. A dificuldade em atribuir o significado de taxa de variação instantânea à derivada quando representada em diversos registros, foi relatada em Cassol (1998).

A apresentação de respostas utilizando o registro figural foi menos encontrada, tanto quando registro de partida como quando registro de chegada. O registro de língua natural foi o mais utilizado nas respostas, seja no caso em que a questão proposta tem como registro de partida o registro figural, o registro simbólico ou mesmo o registro de língua natural (Anexo-I).

**BIBLIOGRAFIA**


CASSOL, A. *Produção de significados para a derivada: taxa de variação*. Dissertação de mestrado. Rio Claro: UNESP, 1997.

DALL'ANESE, C. *Conceito de Derivada*: uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação de mestrado. PUC/SP, São Paulo, 2000.

DUVAL, R. S*émiosis et pensée humaine,* Berna: Peter Lang, 1995.

__________ Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. In: *Actes de la 46 ème Rencontre Internationale de la CIEAEM*, tome 1, 3-15 (Ed. Antibi), Université Paul Sabatier, Toulouse. 1996

___________ Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) *Aprendizagem em matemática:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus Editora, 2003.

FIGUEIRA, R. P. *Um ensino individualizado sobre a derivada de funções algébricas.* Dissertação de Mestrado. FE-UFF, NITERÓI, Brasil, 1972.

GIRALDO, V. A.; CARVALHO L. M. P. Magnificação e linearidade local: novas tecnologias no ensino de conceito de derivada. In: *Anais do XXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2001, Belo Horizonte. v. 2. p. 572-572.

GODOY, L. F. S. *Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem.* Dissertação de mestrado. PUC/SP, São Paulo, 2004.

HILBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.) *Conceptual and Procedural Knowledge*: the case for mathematics. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. p. 1-27

KENDAL, M. *Teaching and Learning Introductory Differential Calculus with a Computer Algebra System*. Tese (Doutorado de Filosofia). Universidade de Melbourne. Melbourne, 2001.

KOGA, M. T. *Uma análise no discurso de alguns professores de cálculo diferencial e integral do curso de licenciatura em matemática*. Dissertação de mestrado. UNESP. Rio Claro, 1998.

LEME, J.C.M. *Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada.* Dissertação de mestrado. PUC/SP, São Paulo, 2003.

MEYER, C. *Derivada/reta tangente:* imagem conceitual e definição conceitual. Dissertação de mestrado. PUC/SP, São Paulo, 2003.

PACHECO, E. R. *Um estudo de atitudes em relação ao cálculo diferencial e integral, em estudantes universitários.* Dissertação de mestrado. Unicentro/FE-UNICAMP, 2000.

PRASLON, F. *Continuites et ruptures dans la transition terminale S/ DEUG Sciences em analyse. Le cas de la notion de deriveée et son environnement.* These de Doctorat. Editeur: IREM. Université de Paris. 2000.

REIS, F. S. *A Tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise:* visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese de doutorado FE-UNICAMP, Campinas, 2001.

SILVA, B. A.; IGLIORI, S. B. C. Um estudo exploratório sobre o conceito de derivada. In: *Anais do IV Encontro Paulista de Educação Matemática.* São Paulo. 1996.

SILVA, N. M. A. *O cálculo diferencial e integral no curso de ciências da computação:* necessidade ou contingência. Dissertação de mestrado. FURB Blumenau, 1998.

# ANEXO - I

**Tabela 1**

| **1ª Questão** | | | |
|---|---|---|---|
| **I** | **Respostas para o item a** | **$f_i$** | **$f_{ri}$** |
| A1 | Derivada de f em relação à x | 51 | 51% |
| A2 | Derivada primeira de "*a*" | 13 | 13% |
| A3 | Derivada de f em relação à derivada de x | 9 | 9% |
| A4 | Derivada de f em relação à x no ponto "*a*" | 7 | 7% |
| A5 | Derivada primeira de f | 6 | 6% |
| A6 | Função derivada | 6 | 6% |
| A7 | Derivada de uma função | 6 | 6% |
| A8 | Taxa de variação de f em relação à x no ponto "*a*" | 2 | 2% |
| | | $\sum f_i = 100$ | |
| **I** | **Respostas para o item b** | **$f_i$** | **$f_{ri}$** |
| B1 | Derivada da função f em relação à x | 19 | 34,5% |
| B2 | Derivada primeira de "*a*" | 10 | 18,2% |
| B3 | Função derivada | 7 | 12,7% |
| B4 | Derivada da função f no ponto "*a*" | 10 | 18,2% |
| B5 | Derivada de f | 4 | 7,3% |
| B6 | Derivada 1ª de f | 2 | 3,6% |
| B7 | $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$ | 3 | 5,5% |
| | | $\sum f_i = 55$ | |
| **I** | **Respostas para o item c** | **$f_i$** | **$f_{ri}$** |
| C1 | Limite da função para x tendendo a "*a*" | 26 | 63% |
| C2 | Derivada da função num determinado ponto | 4 | 9,7% |
| C3 | Inclinação da reta tangente à curva no ponto "*a*" | 4 | 9,7% |
| C4 | É o limite da função f(x) menos f(a) com x tendendo a "*a*" | 4 | 9,7% |
| C5 | É a derivada pela definição | 3 | 7,3% |
| | | $\sum f_i = 41$ | |

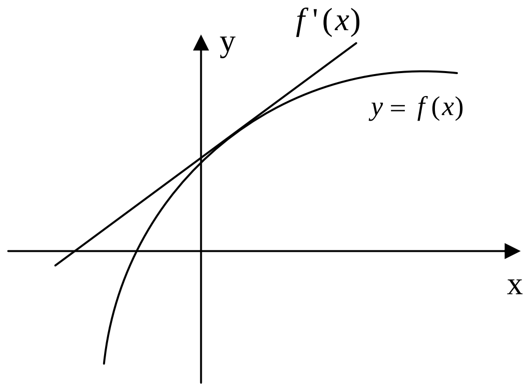
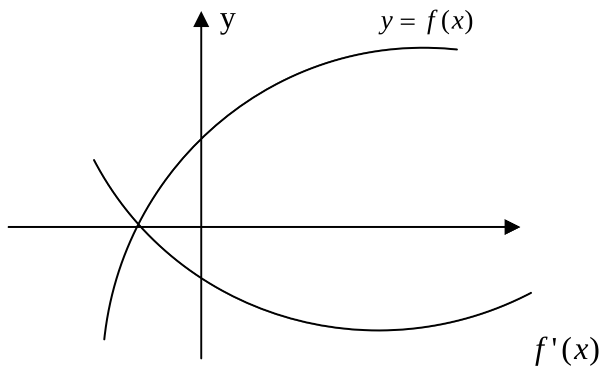
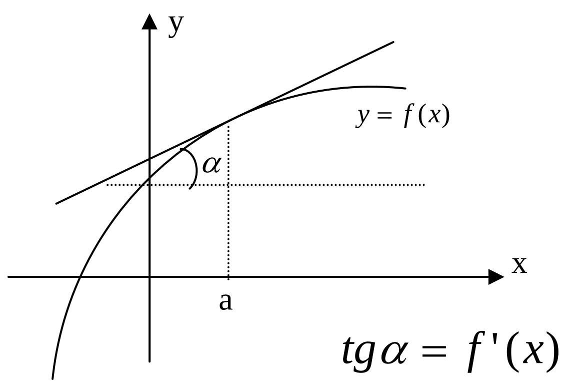
*Teste Diagnóstico*

**Tabela 2**

| **2ª Questão** | | | |
|---|---|---|---|
| **I** | **Respostas** | **$f_i$** | **$f_{ri}$** |
| 1 | Coeficiente angular da reta t | 16 | 19,5% |
| 2 | É a inclinação da reta tangente à curva no ponto *a* | 15 | 18,3% |
| 3 | É a derivada da função no ponto *a* | 13 | 15,9% |
| 4 | É o coeficiente angular da função $f'(x)$ | 9 | 11,0% |
| 5 | É a derivada da função $f(x)$ | 9 | 11,0% |
| 6 | Taxa de variação da função | 2 | 2,4% |
| 7 | A reta t é a derivada da função f no ponto "*a*" | 1 | 1,2% |
| 8 | A tangente de $\alpha$ é igual à derivada de f(x) | 2 | 2,4% |
| 9 | $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$ | 10 | 12,2% |
| 10 | $tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ | 4 | 4,9,% |
| 11 | $\frac{d}{dx}[f(x)] = tg\alpha$ | 1 | 1,2% |
| | | $\sum f_i = 82$ | |

*Teste Diagnóstico*

**Tabela 3**

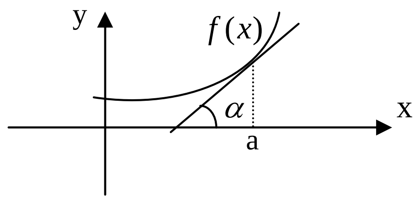
| 3ª Questão | | | |
|---|---|---|---|
| **I** | **Respostas dos alunos** | **$f_i$** | **$f_{ri}$** |
| 1 |  | 29 | 61,7% |
| 2 |  | 9 | 19,1% |
| 3 |  | 9 | 19,1% |
| | | $\sum f_i = 47$ | |

Teste Diagnóstico

**Tabela 4**

| | **4ª Questão** | | |
|---|---|---|---|
| **i** | **Respostas para o item a** | $\mathbf{f_i}$ | $\mathbf{f_{ri}}$ |
| A1 | É a inclinação da reta tangente à curva no ponto "*a*" | 16 | 35,6% |
| A2 | É o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto "*a*" | 8 | 17,8% |
| A3 | É a taxa de variação da função no ponto "*a*" | 7 | 15,6% |
| A4 | É a equação da reta tangente | 4 | 8,9% |
| A5 | É uma reta tangente à função f o ponto "*a*" | 1 | 2,2% |
| A6 | A derivada é o ponto por onde passa a reta tangente | 1 | 2,2% |
| A7 | $f'(a)$ | 5 | 11,1% |
| A8 | $\frac{df(a)}{dx}$ | 2 | 4,4% |
| A9 | $\frac{dy}{dx}(a)$ | 1 | 2,2% |
| | | $\sum f_i = 45$ | |
| **I** | **Respostas para o item b** | $\mathbf{f_i}$ | $\mathbf{f_{ri}}$ |
| B1 | É a derivada da função no ponto *a* | 10 | 50% |
| B2 | É a função derivada | 1 | 5% |
| B3 | É o limite de uma função f(x) quando $\Delta x \to 0$ | 3 | 15% |
| B4 | É a variação que a função sofre num instante | 1 | 5% |
| B5 | $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ | 3 | 15% |
| B6 | $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ | 1 | 5% |
| B7 | $\frac{dy}{dx}(a)$ | 1 | 5% |
| | | $\sum f_i = 20$ | |

*Teste Diagnóstico*

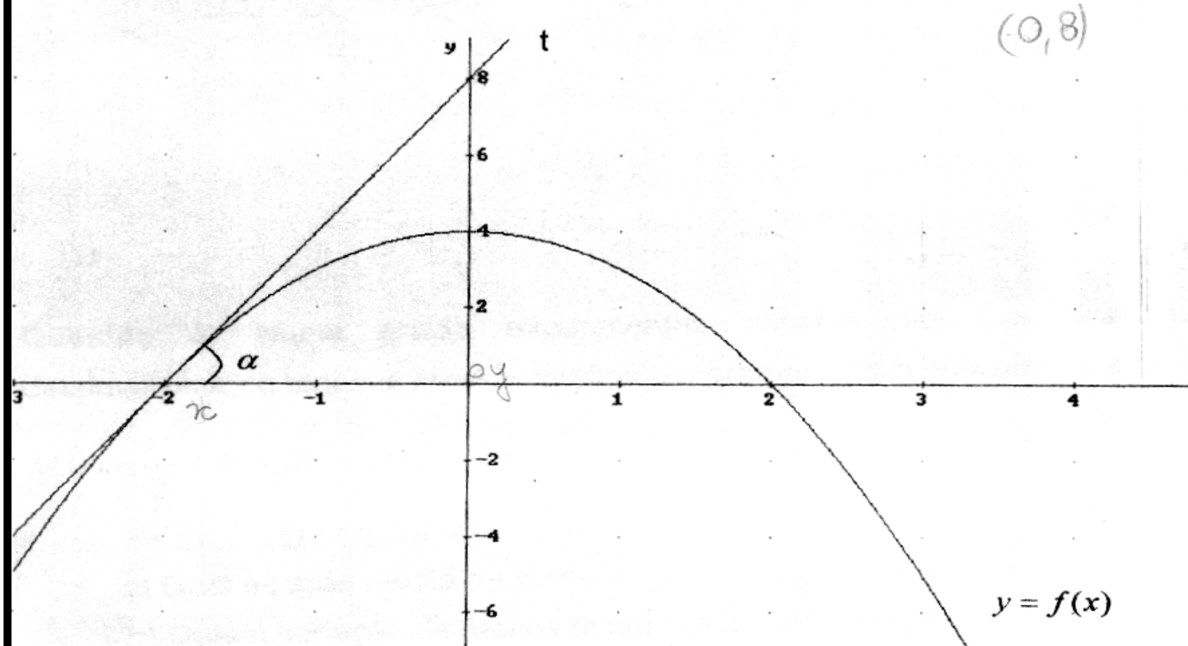
| I | Respostas para o item c | $f_i$ | $f_{ri}$ |
|---|---|---|---|
| C1 | É a derivada da função f no ponto de abscissa *a* | 22 | 50% |
| C2 | A inclinação da reta tangente num ponto | 5 | 11,4% |
| C3 | É o ângulo formado pela reta tangente e a abscissa do plano cartesiano | 4 | 9% |
| C4 | É a tangente do ângulo formado pela reta tg à curva com a abscissa no ponto *a* | 3 | 6,8% |
| C5 | É o coeficiente angular | 3 | 6,8% |
| C6 |   $tg\alpha$ | 5 | 11,4% |
| C7 | $\frac{df(a)}{dx}$ | 1 | 2,3% |
| C8 | $f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ | 1 | 2,3% |
| | | $\sum f_i = 44$ | |

*Teste Diagnóstico*

# ANEXO II

**Figura 1**

**Questão 1:** A reta t é tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto (-2,0).




a) Encontre a equação da reta t.

b) Informe qual o sinal de $f'(-2)$.

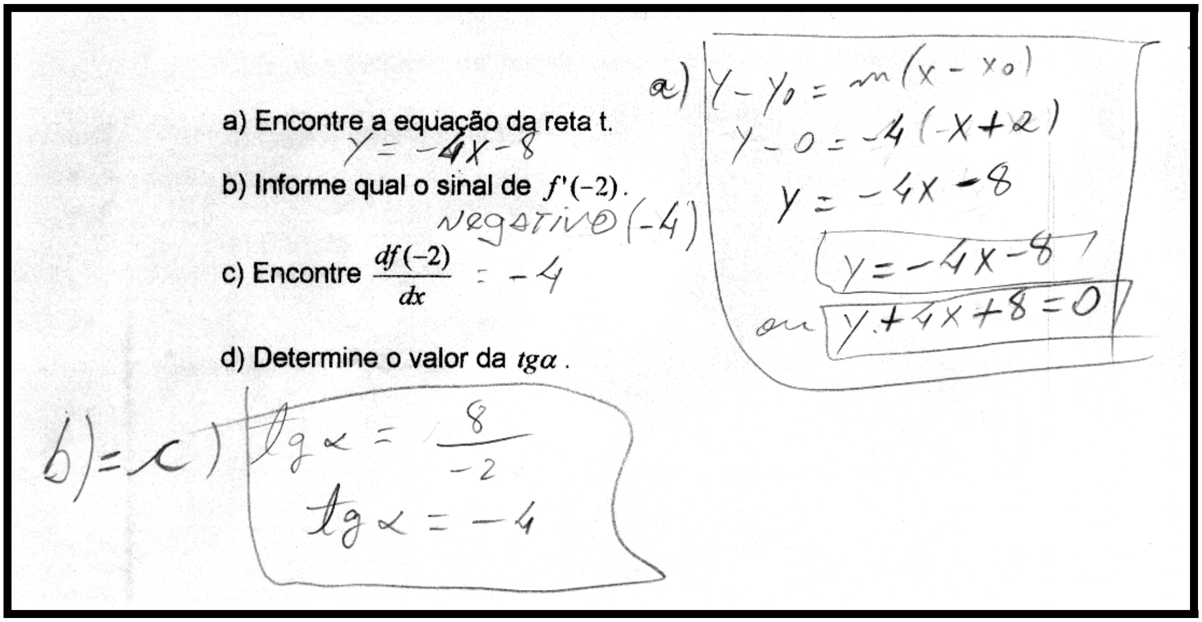
c) Encontre $\dfrac{df(-2)}{dx}$

d) Determine o valor da $tg\alpha$.

não sei como fazer.

$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$
$$0 - 8 = m.(-2 - 0)$$
$$-8 = m.(-2)$$
$$-8 = -2m$$
$$-2m = -8$$
$$m = \frac{-8}{-2}$$
$$m = 4$$

**Figura 2**


a) Encontre a equação da reta t.

$Y = -4x - 8$

b) Informe qual o sinal de $f'(-2)$.

NEGATIVO (-4)

c) Encontre $\frac{df(-2)}{dx}$ $= -4$

d) Determine o valor da $tg\alpha$.

a) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0 = -4(-x + 2)$

$y = -4x - 8$

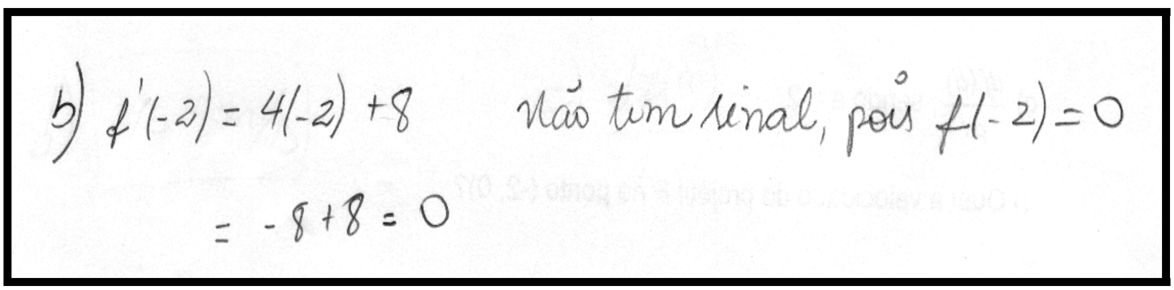
$\boxed{y = -4x - 8}$

ou $\boxed{y + 4x + 8 = 0}$

b) = c) $tg\alpha = \frac{8}{-2}$

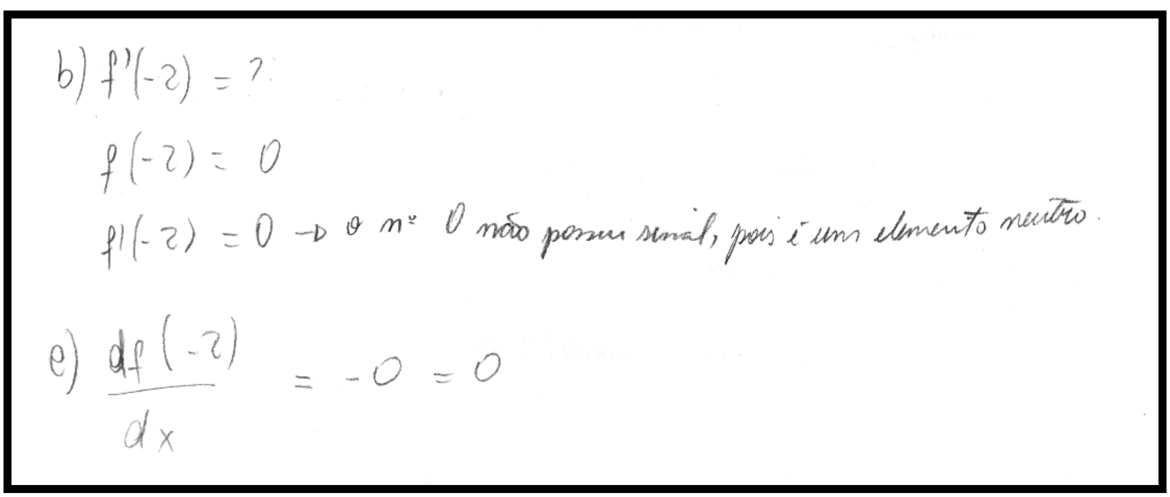
$tg\alpha = -4$

**Figura 3**


b) $f'(-2) = 4(-2) + 8$ Não tem sinal, pois $f(-2) = 0$

$= -8 + 8 = 0$

**Figura 4**

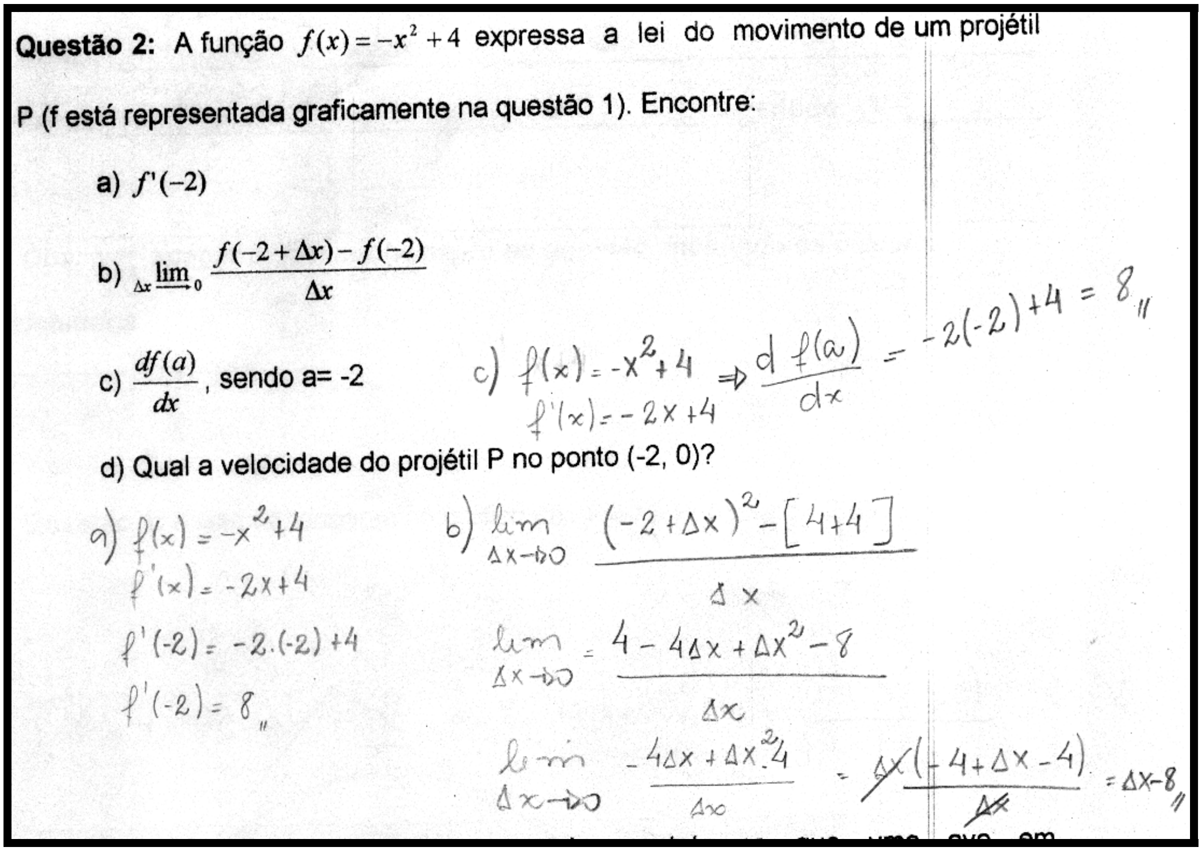

b) $f'(-2) = ?$

$f(-2) = 0$

$f'(-2) = 0 \rightarrow$ o nº 0 não possui sinal, pois é um elemento neutro.

c) $\frac{df(-2)}{dx} = -0 = 0$

**Figura 5**



**Questão 2:** A função $f(x) = -x^2 + 4$ expressa a lei do movimento de um projétil P (f está representada graficamente na questão 1). Encontre:

a) $f'(-2)$

b) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$

c) $\dfrac{df(a)}{dx}$, sendo a= -2

d) Qual a velocidade do projétil P no ponto (-2, 0)?

c) $f(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow \dfrac{d\,f(a)}{dx} = -2(-2)+4 = 8_{//}$

$f'(x) = -2x + 4$

a) $f(x) = -x^2 + 4$

$f'(x) = -2x + 4$

$f'(-2) = -2.(-2) + 4$

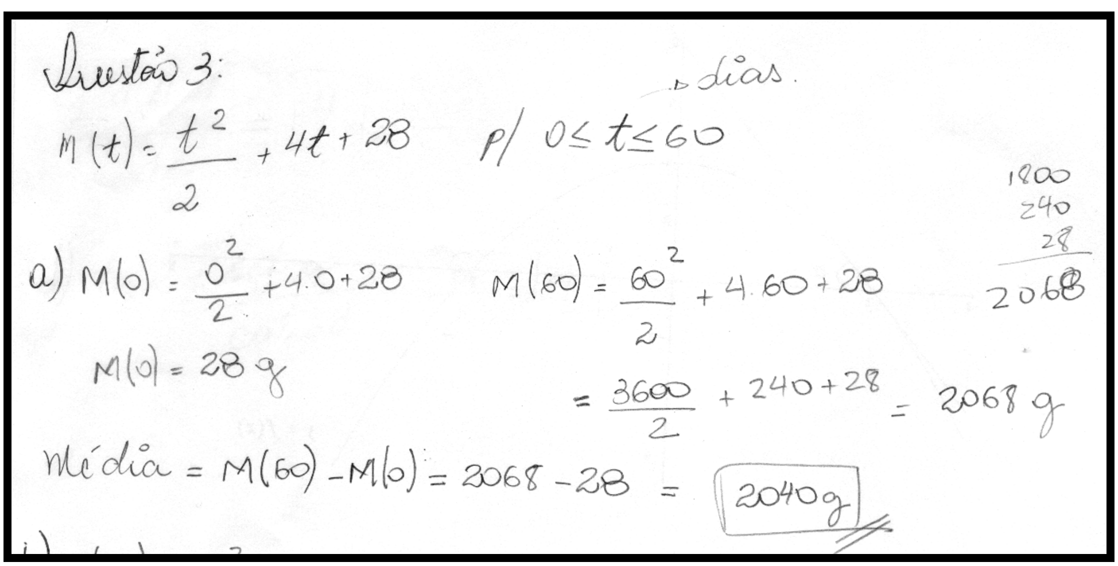
$f'(-2) = 8_{//}$

b) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(-2+\Delta x)^2 - [4+4]}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 - 8}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{-4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \dfrac{\cancel{\Delta x}(-4 + \Delta x - 4)}{\cancel{\Delta x}} = \Delta x - 8_{//}$

**Figura 6**



Questão 3:

dias.

$M(t) = \dfrac{t^2}{2} + 4t + 28$ p/ $0 \leq t \leq 60$

1800
240
28
2068

a) $M(0) = \dfrac{0^2}{2} + 4.0 + 28$

$M(0) = 28\,g$

$M(60) = \dfrac{60^2}{2} + 4.60 + 28$

$= \dfrac{3600}{2} + 240 + 28 = 2068\,g$

Média $= M(60) - M(0) = 2068 - 28 = \boxed{2040g}$