

# REGISTROS SEMIÓTICOS E SUA IMPORTÂNCIA PARA A COMPREENSÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS: O ESTUDO DE CASO DE UMA PROFESSORA FRENTE À RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA INTRODUTÓRIO ÀS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

KALEFF, Ana Maria M. R. – UFF

GT: Educação Matemática / n.19

Agência Financiadora: Não contou com financiamento

## 1. APRESENTAÇÃO

Este artigo tem em vista contribuir para uma reflexão sobre o comportamento de adultos frente a resultados de pesquisas realizadas por Raymond Duval e seus colaboradores (1995, 2000, 2003), quanto ao papel dos registros semióticos e sobre a sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos.

O estudo de caso aqui considerado, o da professora Lara, faz parte de uma pesquisa mais ampla envolvendo um grupo de discentes de curso de formação continuada para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, no nível de pós-graduação *lato sensu*. Colocou-se sob investigação o comportamento dos participantes diante de atividades ligadas à situação de resolução de um problema de Matemática Discreta, designado doravante como *problema-objeto*, o qual também é adotado como atividade introdutória às Geometrias não-Euclidianas.

Cumprе salientar que tais conhecimentos, muito pouco, se não de todo, participam dos conteúdos presentes no âmbito escolar, no entanto, tais saberes já ensaiam uma aproximação da Geometria Escolar em decorrência do aconselhamento de grupos internacionais de pesquisa sobre currículos (MAMMANA e VILLANI, 1998), bem como das orientações expressadas em documentos norteadores da prática do professor de Matemática (NCTM, 1991; MEC, 1998).

Com fulcro no problema-objeto, na estruturação da entrevista realizada, foram adotados os conceitos de *representação mental* e de *compreensão integrativa de um objeto matemático relacionada à coordenação de registros semióticos de representação* (DUVAL, 1995, 2000). Buscando-se observar as particularidades dos movimentos cognitivos desenvolvidos ao longo das atividades, adotaram-se também os princípios norteadores de uma *análise micro-genética interpretativa de uma entrevista* (MEIRA,

1994), bem como os de uma *análise cognitiva da conversão de registros semióticos de uma atividade matemática* (DUVAL, 1995, 2003). Esta é baseada na exploração das variações de *congruência semântica* surgidas no caso da conversão entre dois diferentes registros semióticos de representação, discursivos ou não, referentes a um mesmo objeto matemático.

Comungando com Duval, partiu-se da hipótese de que o sujeito, ao passar de um registro semiótico (por exemplo, do registro da língua natural) no qual o enunciado do problema-objeto se apresenta para outro (discursivo, ou não), deixa perceber neste registro de chegada, de que maneira entende o conteúdo dos objetos matemáticos arrolados no enunciado, isto é, as unidades elementares de significado relacionadas no enunciado do problema.

Utilizaram-se duas modalidades de instrumentos de registro para os dados da entrevista. A primeira constituindo-se do registro *videográfico*, da qual se produziu um *Resumo Analítico*. A segunda, de um conjunto de anotações, realizadas pelo sujeito entrevistador, visando à construção do instrumento de análise denominado de *Seqüência Histórica de Construção dos Registros Gráficos* o qual permite o acompanhamento da evolução dos traçados gráficos utilizados pela entrevistada no transcorrer da resolução do problema-objeto. Este instrumento apresenta as múltiplas transformações das representações semióticas, não discursivas e discursivas, estabelecidas pela entrevistada, com exceção daquelas na língua natural (as quais se encontram no resumo analítico).

## **2. O PROBLEMA-OBJETO**

O problema-objeto adotado na entrevista é colocado como um *jogo matemático de regras* referentes a objetos da Teoria dos Conjuntos. Tal abordagem apresenta-se de uma maneira semelhante a que ocorre em livros-texto destinados à introdução dos sistemas axiomáticos das Geometrias não-Euclidianas, tanto naqueles dirigidos ao ensino superior (CASTRUCCI, 1978), quanto a séries que antecedem os estudos universitários (JORGE ET AL., 1999).

*Considere um jogo cujas regras são estabelecidas por um sistema de proposições afirmativas relativamente a um conjunto qualquer de elementos, isto é, considere um sistema de afirmações sobre um conjunto qualquer  $S$  com as características descritas a seguir.*

*$S$  é um conjunto de elementos quaisquer chamados “pontos”.*

*Convencionou-se também chamar de “retas” a subconjuntos contidos em  $S$ , mas que não coincidem com ele, que contenham exatamente três pontos. Além disso, considere que neste jogo, existe uma relação entre os pontos e as retas de  $S$  a qual satisfaz às seguintes afirmações.*

*$A_1$ : Existe pelo menos um ponto em  $S$ .*

*$A_2$ : Por cada ponto de  $S$  passam exatamente duas retas.*

*$A_3$ : Por dois pontos distintos quaisquer de  $S$  passa, no máximo, uma reta.*

*Saiba que, em  $S$ , pontos diferentes e retas diferentes são sempre denotados por letras diferentes, sendo que os pontos são denotados por letras maiúsculas e as retas por minúsculas.*

*Qual é o número mínimo de pontos de  $S$  que admite uma solução para o jogo?*

Observe-se que o problema se apresenta na forma de afirmações em um jogo de regras, cuja estrutura é elementar, pois esta se expressa por meio de seis afirmações, das quais três são regras implícitas, na forma de convenções, e as outras como regras explícitas:  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ . Estas estabelecem uma *relação de pertinência* entre os elementos e os subconjuntos de  $S$ . Esta relação é explicitada pelo verbo “passar”, a qual não estabelece nenhuma relação métrica entre os elementos, não considerando, portanto, nenhuma interpretação *a priori*, relacionada a implicações com comprimento e proximidade. As únicas implicações possíveis neste contexto são aquelas que são estabelecidas pela relação de pertinência entre elementos e conjuntos.

O enunciado constitui-se de proposições que se referem a “*elementos quaisquer*”, denominados “pontos” e de “*subconjuntos de três pontos*” deste mesmo conjunto, denominados “retas”. Buscou-se observar de que forma o sujeito representaria estas expressões. Esta preocupação se deve ao fato de que as denominações “ponto” e “reta” nas Geometrias não-Euclidianas, embora algumas vezes, não sejam representantes dos mesmos

objetos matemáticos relacionados à Geometria Euclidiana, ainda assim são frequentemente utilizadas (KALEFF, 2004, p. 96-98).

Cabe salientar ainda que duas outras instâncias levaram à escolha do problema-objeto. Por um lado, ele foi escolhido em função da importância das proposições nele contidas. Elas fazem parte do corpo das afirmações comuns às Geometrias, a Euclidiana e as não-Euclidianas, isto é, às *Geometrias de Incidência* (CASTRUCCI, 1978, p. 6-12).

Por outro lado, a atividade apresentada foi propositalmente estabelecida na forma de uma situação-problema, pois o processo de encadeamento cognitivo envolvido na resolução exige a adoção de um particular procedimento, o qual emula, ainda que de forma simplificada, situações historicamente conhecidas e que se apresentam no transcorrer do processo de criação de novas idéias no âmbito da Ciência. Este procedimento cognitivo é designado por *abdução* e se caracteriza pela necessidade da adoção de uma hipótese plausível cuja validade precisa ser verificada frente às afirmações presentes no escopo do problema considerado (MAGNANI, 2001, p. 139-173).

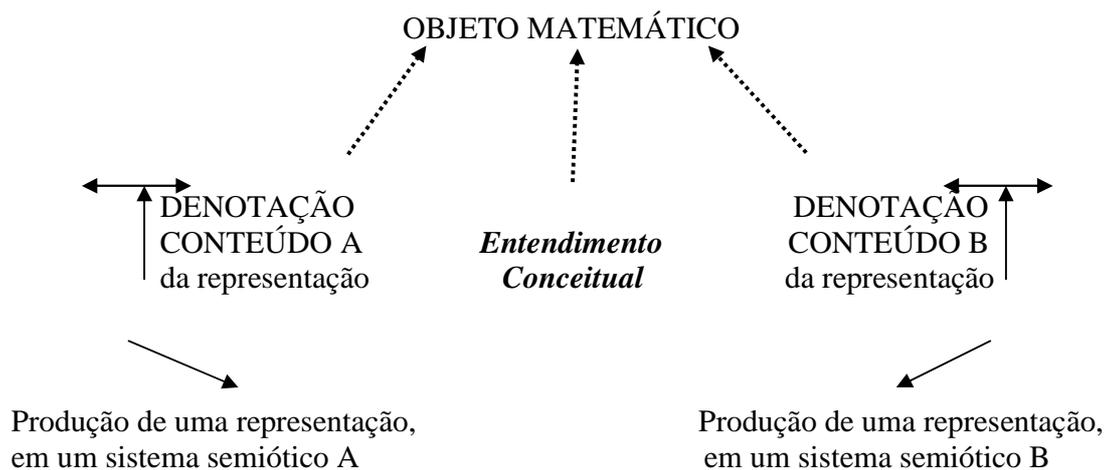
### 3. COMPREENSÃO MATEMÁTICA FRENTE À CONVERSÃO DE REGISTROS

È relevante ser lembrado que, do ponto de vista de Duval, a compreensão de um conceito ou objeto matemático, denominada de *compreensão integrativa*, está relacionada com suas representações semióticas na forma de registros gráficos, discursivos e não discursivos, pois tal

*“compreensão integrativa é a articulação dos registros, a qual constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática [...] e não o inverso, qual seja o ‘enclausuramento’ em cada registro. [...] Assim,] a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Esta é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto. [Além do que, a conversão entre tais registros é fundamental porque] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento [em um mesmo registro, porém], é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto [...] Porque] duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm, de forma alguma, o mesmo conteúdo” (2003, p. 22).*

À guisa de ilustração, apresenta-se no Quadro 1 um esquema de como Duval considera a articulação entre dois registros de representação de um objeto matemático, quando realizada em um procedimento de conversão, e de sua relação com as condições cognitivas para o entendimento conceitual do mesmo objeto.

**Quadro 1** Coordenação Integrativa entre Dois Registros de um Objeto Matemático



Condições Cognitivas do Entendimento Matemático (Duval, 2000, p. 65)

#### 4. A PROFESSORA LARA

A escolha da professora Lara para ser aqui apresentada deve-se a dois fatores, isto é, à sua experiência como profissional e a uma característica peculiar de sua formação. Por um lado, a entrevistada possui uma larga experiência profissional de mais de 29 anos de atuação (dos quais 25, no Ensino Fundamental e 20, no Médio). Por outro, por ter concluído o curso de bacharelado em Matemática (em uma universidade pública, há cerca de 28 anos) e de ser formada professora dos primeiros dois ciclos do Ensino Fundamental (antigo Curso Normal). Além do que, a principal característica das disciplinas do seu curso de bacharelado foi a ênfase dada à Lógica Formal e à Teoria dos Conjuntos. Característica também presente em uma das disciplinas do Curso de Especialização, cursada pela entrevistada, no semestre letivo anterior à entrevista.

A entrevista que se segue é apresentada por meio de sua Sequência Histórica da Construção dos Registros Gráficos (SHL) e de parte de seu respectivo resumo analítico. Cumpre ainda lembrar que na SHL, cada quadro relata o histórico da criação do desenho da

respectiva figura nele indicada, pois cada um dos gráficos no quadro corresponde a um instantâneo da figura em desenvolvimento (o qual é indicado pelo número da interlocução no diálogo, colocado na parte superior do gráfico).

Por outro lado, o texto que se segue foi elaborado tendo-se presente a necessidade de se pormenorizar a descrição das ações realizadas frente ao caráter micro-genético da análise da entrevista.

## 5. A ENTREVISTA COM LARA

A seqüência histórica da construção de registros gráficos apresentada por Lara (SHL) encontra-se no Quadro 2, na qual se apresenta a ocorrência de três tipos distintos de registros gráficos para “ponto” e “reta” de S, inicialmente considerados na linguagem natural do enunciado.

### 5.1 APARECIMENTO DE UMA PARTICULAR SOLUÇÃO

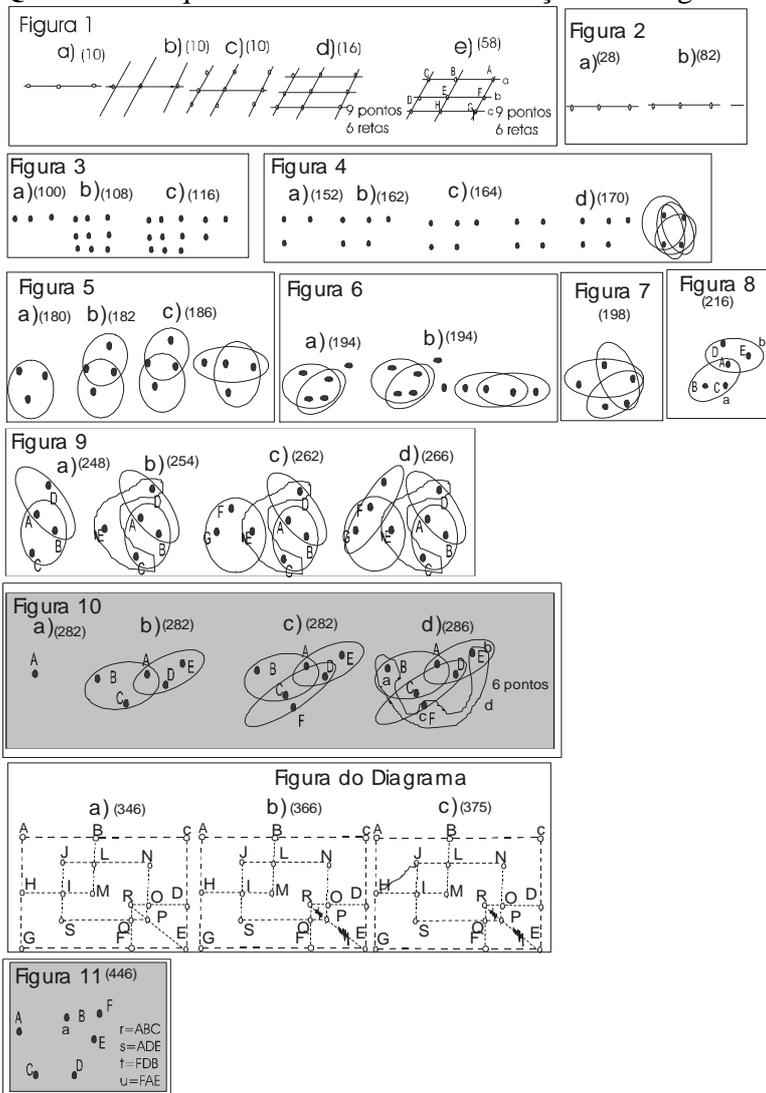
Analisando-se acuradamente a Figura 1 da SHL, pode-se afirmar que os desenhos de Lara expressam uma conversão entre o registro da linguagem natural e o registro clássico euclidiano para reta (BARBOSA, 1995). Esta conversão, no entanto, não é congruente, pois não permite estabelecer uma correspondência semântica entre o significado das unidades elementares consideradas (“ponto” e “reta” de S), apesar de apresentar uma unicidade semântica no registro de chegada (esclarecimentos sobre exemplos de casos de congruência de registros podem ser encontrados em DUVAL, 1995, p. 52-61; KALEFF, 2004, p. 361-435).

Essa não congruência entre os registros aponta que a entrevistada considera a natureza dos “pontos” de S como “pontos” da Geometria Euclidiana, e não como elementos quaisquer de um conjunto, enquanto que as “retas” de S são consideradas como “retas euclidianas”, o que permite que, ainda na Figura 1, uma particular solução do problema se apresente. Nesta, as “retas” de S são registradas como “retas euclidianas paralelas”. Esta interpretação a permitiu encontrar uma particular resposta da seguinte maneira: *“Eu tenho uma reta [Desenha Figura 1a], porque aqui diz que uma reta contém exatamente três pontos. Mas por cada ponto passam duas retas, então nesse ponto tem que passar outra*

reta, nesse tem que passar outra e nesse tem que passar outra [Desenha Figura 1b]. Aí tem que ter mais dois pontos [Desenha Figura 1c...]. Nesse ponto aqui tem que passar duas retas. Essa história desses três pontos aqui que está me... [Desenha Figura 1d]. Podem passar duas aqui, [...] cada uma tem três pontos, então nove pontos”.

Esta solução da entrevistada é amplamente conhecida nos estudos de Geometria Discreta, como um *Modelo de Plano com “Figuras de Moinho”* contendo 9 Pontos (Castrucci, 1978, p. 11), sendo a sua representação gráfica um registro congruente às regras  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ .

### Quadro 2 Sequência Histórica da Construção dos Registros Gráficos de Lara (SHL)



Tal solução, no entanto, não satisfaz à condição do problema-objeto quanto ao número mínimo de pontos para S. Cumpre salientar que Lara não cogita em se perguntar sobre tal condição, parecendo que a solução encontrada lhe é tão óbvia, que não suscita nenhuma conjectura quanto a sua adequação como resposta ao problema. Aparentemente, os traços que compõe a configuração do desenho representam imagens (representações) mentais conceituais geométricas prototípicas as quais influenciam a resolução do problema. Tais representações mentais de retas euclidianas paralelas parecem impedir que Lara exerça uma reflexão maior sobre a resposta obtida.

Como se começa a perceber, neste procedimento de resolução apresentado por Lara, e como se verá no decorrer da apresentação desta entrevista, a incidência de outros exemplos de registros semióticos geométricos prototípicos, na forma de retas horizontais e de retas paralelas, se fará presente e não poderá ser negada. Muito menos, poderá ser negligenciada a extensão de sua intervenção no âmbito da resolução do problema-objeto. Este fato vem ao encontro de pesquisas realizadas por educadores matemáticos israelenses sobre a incidência de imagens (mentais) conceituais geométricas prototípicas em crianças e adultos (HERSHKOWITZ e VINNER, 1983) e da sua emergência de maneira incontrolada (PRESMEG, 1997).

## 5.2 ESTABELECIMENTO DE UM CONFLITO ENTRE REPRESENTAÇÕES MENTAIS

Desde o início da entrevista fica evidenciado que Lara concebe o registro de representação da “reta de S” como reta euclidiana, densa e contínua, sendo uma reta *com* três pontos de S e não como uma reta *de* três pontos. Constatada a dificuldade da entrevistada frente à resolução, buscou-se levá-la a reconsiderar os registros traçados, tentando-se enfatizar a presença dos segmentos traçados entre os pontos das retas euclidianas da Figura 1. Frente ao impasse, a entrevistada foi instada a reler as regras de S, o que a leva, aparentando muita estranheza, a se perguntar: *“Uma reta pode ter exatamente e apenas três pontos? Porque isso aqui está contendo três pontos. Mas não são exatamente três pontos [Apontando a Figura 2a]. É uma reta, da qual eu destaquei três pontos, mas que não contém exatamente três pontos. [...] Ela é uma reta de um plano qualquer aí, da geometria euclidiana”*.

Pode-se afirmar que, nesta altura da entrevista, Lara sofre uma influência de conceitos guardados na memória e a presença de uma imagem mental conceitual prévia a qual prescinde das afirmações referentes ao jogo em questão e que parece enublá-las, colocando-as no esquecimento. Além disso, aparentemente se constela a admissão da pré-existência de um sistema de registros semióticos ao enunciado do problema, o qual impossibilita o desenvolvimento da resolução.

A situação inesperada resultante da não congruência entre os significados das unidades elementares consideradas nos diferentes registros, causada pela tensão dialética frente à existência de infinitos pontos entre dois determinados da “reta euclidiana” e à existência de somente três pontos na “reta de S”, aparentemente impede a entrevistada de buscar um novo registro semiótico. A representação mental pré-existente parece intervir e não ser negada pela afirmação enunciada como convenção para “reta de S” (aquela pela qual esta é um “conjunto de três pontos” e considerada por Lara como “*uma reta euclidiana com três pontos*”), pois tal convenção parece não ter nenhum efeito sobre a evocação da representação mental (imagem conceitual) euclidiana da “reta de S”, a qual parece interferir insistentemente com outras representações mentais emergentes da entrevistada. Frente à pergunta: “***Uma reta de onde tem infinitos pontos?***”, Lara, desenhando a Figura 2c, retruca que “*Porque a reta tem infinitos pontos, se eu fizer um pedacinho representando uma reta já tem infinitos pontos, não tem exatamente três pontos [...] Ah, do plano euclidiano, aí então eu tenho que sair de tudo o que eu tenho na cabeça e pensar numa reta com exatamente três pontos?*”. À nova pergunta “***O conjunto S, como ele é?***” a entrevistada parece se mostrar ainda mais desconfortada, como se pode constatar pela sua reação: “*Não sei. Juro a você que eu estou perdida aqui [...] eu não consigo representar isso*”.

### 5.3 A RUPTURA COM UMA PARTICULAR REPRESENTAÇÃO MENTAL

É importante se notar a reação da entrevistada à pergunta “***Como você representaria uma reta de S à sua moda?***” com a qual se buscava levá-la a criar um registro semiótico, sem admitir qualquer outro pré-existente ao problema-objeto. Ao ser chamada a tomar para si o controle da situação, Lara sai imediatamente do imobilismo,

apresentando uma conversão de registros, para um registro de uma representação particular para “reta” de S: como pontos isolados colocados linearmente (Figura 3a).

Desta constatação pode-se concluir que a entrevistada concebe, uma primeira ruptura com a representação mental, na forma de imagem conceitual da reta euclidiana densa e contínua, passando a considerar somente a sua forma de traçado retilíneo e não mais a existência de uma infinidade de pontos entre cada dois deles.

A seguir, Lara apresenta um outro registro gráfico para representar a solução com nove pontos isolados para S, como na Figura 3b. Este novo registro vai servir para uma reconsideração sobre o significado de “reta” de S, levando-a a uma nova conversão de registro, na qual apresenta uma outra unidade de significado para “reta” de S: como pontos isolados colocados na forma de um triângulo retângulo (Figura 3b). Lara afirma que esta figura *“está satisfazendo as condições do jogo. É um conjunto de pontos, exatamente três pontos é uma reta, então eu estou chamando isso aqui de reta, [...] isso agora pra mim é uma reta [...]. Cada conjunto de três, forma uma reta”*.

A partir da Figura 3, pode-se dizer que os desenhos que Lara apresenta, expressam uma conversão entre o registro da linguagem natural e um registro não convencional não discursivo onde são representados somente pontos isolados, criados pela marca deixada pela ponta de um lápis. Esta forma de expressão gráfica será aqui referida como *Registro Não Discursivo de Pontos Isolados*.

Esta última conversão de registro do enunciado do problema, no entanto, não é congruente, pois apesar de permitir estabelecer uma correspondência semântica entre o significado das unidades elementares consideradas, não permite as mesmas possibilidades de apreensão para “reta” de S, e, além disso, apresenta uma duplicidade semântica no registro de chegada, a qual afeta a relação de congruência, dificultando o seu entendimento.

Apesar da não congruência entre estes dois registros, é a observação dos mesmos que, aparentemente, permite à entrevistada ter certeza de suas conclusões quanto à “reta de S” poder ser considerada como *“conjunto com exatamente três pontos”*, independentemente da posição dos elementos desenhados no papel. Esta é, sem dúvida, a segunda ruptura cognitiva que a entrevistada realiza com a concepção inicial de reta euclidiana, o que lhe permitirá, de agora em diante, a rever suas concepções a partir das afirmações sobre S, como declara ao desenhar a Figura 3c: *“Isso aqui poderia ser uma reta.*

*está satisfazendo a condição de exatamente três pontos, eu chamo isso de reta. Posso, por isso aqui. [Apontando a folha com a descrição de S...] estou agora entrando nesse jogo aqui, estou viajando nesse jogo aqui. Eu estou chamando de reta um subconjunto contendo exatamente três pontos e aqui tem exatamente três pontos, isso é uma reta. Pronto! [Afirma, apontando a Figura 3c]”.*

Lara traça comentários sobre a independência das denominações para os termos considerados e manifesta, espontaneamente, a negação da existência de uma representação mental de uma imagem prototípica para a reta horizontal euclidiana, negação esta que voltará a ser objeto de suas considerações no final da entrevista. Afirma que *“uma reta desse conjunto S, pode até ser chamada de linha, o nome é independente, é, linha [...] mas o nome de reta atrapalhou. Atrapalhou porque eu fico com a concepção que eu tenho na cabeça, de reta é um conjunto de infinitos pontos em linha, assim bonitinho [indicando, com a mão, uma reta, no espaço, horizontal e paralela ao tampo da mesa]”.*

Após as tentativas para apresentar 4 e 5 pontos para S, mostradas nas Figuras 4a, b, c, por meio do registro de pontos isolados, Lara realiza um outro registro usando diagramas de Venn, como apresentado em Figura 4d.

Aparentemente, a entrevistada faz a passagem para a representação mental de “reta” de S como “um conjunto de 3 pontos quaisquer”, agora no sistema de registro da forma de diagrama de Venn, para a qual uma particular localização no plano não é interveniente.

É interessante ser observado que essa passagem para o sistema de *Registros em Diagramas de Venn* é realizada de uma maneira tranqüila e natural, sem qualquer conflito, quase que de uma forma inconsciente, pois Lara passa a utilizar o registro desses diagramas sem fazer nenhuma referência específica quanto à localização dos pontos.

Desta maneira, a entrevistada parece conceber a ruptura com a natureza euclidiana para os “pontos” de S, tratando-os como “elementos quaisquer” de um conjunto representado por meio de um diagrama de Venn. Mais adiante, como se verá, este momento será objeto de reconsiderações por parte de Lara (vide item 6).

#### 5.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE RESOLUÇÃO

A partir deste momento e sem se referir mais às formas particulares de “retas” de S anteriormente apresentadas, Lara cria por abdução, seqüências de 4 e de 5 pontos a partir

das proposições para S e, buscando observar se todas as afirmações estão sendo verificadas para tais configurações gráficas (Figuras 5a a 5c, 6, 7, 8).

Com estes procedimentos, Lara chega à conclusão de que o jogo somente apresenta uma solução no caso em que S admite infinitos pontos, pois não percebe que se baseia na observação visual de registros não congruentes a todas as afirmações de S e que não representam corretamente ou a afirmação  $A_2$ , ou a  $A_3$  (Figuras 5c, 6, 7, 8 e 9). Somente frente à outra pergunta “*Você tem certeza de que todas as regras estão funcionando?*” é que percebe ter considerado equivocadamente o significado da palavra “máximo” na afirmação  $A_3$ , ao traçar a Figura 7, no entanto, afirma explicitamente total conhecimento teórico do significado deste termo no contexto matemático.

A partir daí, como pode ser observado na Figura 10, Lara resolve o problema afirmando que o traçado da Figura 8 é o mais “*próximo*” às regras, reconhecendo uma configuração de traços congruentes a  $A_2$  e  $A_3$ . Considerando às afirmações sobre S, cria um ponto e a partir dele, duas retas e mais cinco pontos, como pode ser verificado: “*O ponto A existe, pois existe pelo menos um ponto em S, está aqui [Desenha Figura 10a relê as regras]. Se eu fizer isso aqui, por dois pontos distintos está passando no máximo uma reta. Eu só não posso pegar o A para completar a reta [Desenha Figura 10b], dois pontos distintos iam ter duas retas, então aqui está, tem que ter um ponto aqui. [Desenha Figura 10c e verifica as regras...]. Posso formar um conjunto com B, E e F como uma reta. Dá pra fazer essa reta aqui maluca. Vou circular essa minha reta aqui por fora. [Desenha Figura 10 d...] que maluquice que eu fiz aqui, mas é isso. Está feito. Seis pontos*”.

Apesar da maneira informal pela qual se expressa, Lara realiza a criação da resposta correta com o sexto ponto por meio de um passo de abdução, o qual ocorre na passagem da Figura 10b para 10c. A seguir, considerando a configuração pré-fixada, desenha uma “*reta maluca*”, como se refere à forma traçada para a “*reta*” de S, com a qual finaliza a atividade.

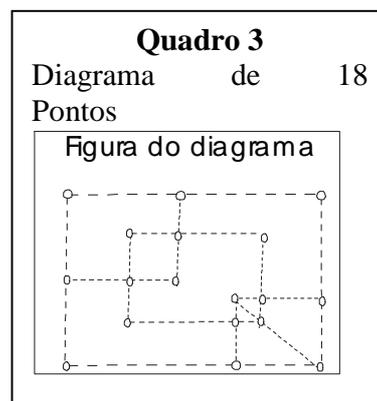
## 5.5 UMA OUTRA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA PARA A SOLUÇÃO ENCONTRADA

Buscando observar o comportamento da entrevistada frente a um outro tipo de registro gráfico para um caso particular do jogo em questão, foi-lhe apresentada a seguinte questão (vide Quadro 3).

### Questão do Diagrama

Considerando que, no diagrama apresentado na Figura do Diagrama, as linhas pontilhadas ligam pontos que podem pertencer a uma mesma reta, este diagrama poderia representar um esboço gráfico de um exemplo de  $S$ , onde  $S$  teria 18 pontos,

$S = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R\}$ ? Caso isto não aconteça, reconstrua o exemplo para que o seja. Como você fez isso?



Embora, Lara não levante nenhum questionamento a respeito do traçado do Diagrama de 18 pontos, considerando os segmentos horizontais e verticais como registros para as “retas” de  $S$ , ela reconhece imediatamente a necessidade de retirar do desenho o segmento “inclinado” para que o Diagrama se torne um registro congruente às regras de  $S$  para 18 pontos. Em seqüência, apresenta uma outra solução para o problema a qual registra na forma de um registro discursivo simbólico (Figura 11), indicado neste estudo como *Registro de Agrupamentos de Letras*, o qual afirma, como se verá mais a seguir, no item 5, ser fruto da observação visual dos registros anteriores.

O particular registro simbólico criado por Lara, aparentemente, tem as mesmas características de funcionalidade dos registros discursivos simbólicos da linguagem típica à Teoria dos Conjuntos (criada no século XIX por George Cantor, na qual os conjuntos têm seus elementos indicados por letras, separadas por vírgulas e entre chaves), pois ela se refere aos termos de  $S$ , expressados por agrupamentos, como se realmente estivessem escritos na forma de conjuntos.

Cumprindo ainda salientar que, surpreendentemente, no final da entrevista, depois de ter sido confrontada com o Diagrama de 18 Pontos, Lara declara perceber somente “*agora*” a predominância, em seu pensamento, da incidência de uma representação mental da reta euclidiana na direção horizontal, observação que é contraditória ao que já havia expressado anteriormente no decorrer da entrevista. Declara ainda que, somente frente às perguntas colocadas é que constatou o “*poder de uma imagem mental*” a qual “*o tempo inteiro está vindo horizontal, o tempo todo!*”. Esta constatação lhe causa espanto, pois contradiz o que afirmara realizar normalmente na sua prática como professora do ensino fundamental, pois

declarara sempre apresentar aos alunos as retas euclidianas como segmentos traçados no plano, em várias posições. Afirma ainda que, embora tenha tentado no decorrer da entrevista se ater às proposições e à “*apagar e ficar com essa noção de S, daqui*”, no entanto “*toda hora que a gente fala reta, ela vem horizontal. Gozado, como é que é forte!*”.

Lara termina a entrevista declarando ter gostado e achado interessante realizar a atividade proposta enfatizando ter apreciado “*tentar tirar a imagem da reta da minha cabeça e formar uma outra imagem*”, enfatizando a importância deste tipo de exercício para o professor, pois considera que a observação dos diferentes registros gráficos, poderia levar “*a quebrar totalmente tabus que se tem na cabeça*”.

## **6. AS CONVERSÕES DE REGISTRO FRENTE À RUPTURA COM AS CONCEPÇÕES EUCLIDIANAS E À BUSCA DA COMPREENSÃO INTEGRATIVA**

É interessante analisar o comportamento de Lara frente à apresentação do Diagrama, para que se entenda a sua busca de uma nova representação semiótica não-euclidiana para os “elementos” e “retas” de S. No final de sua entrevista, como se relata a seguir, Lara apresentou declarações esclarecedoras as quais merecem ser enfatizadas por acrescentarem preciosos subsídios às reflexões sobre a compreensão dos conceitos envolvidos no enunciado do problema-objeto e sua relação com as conversões de registros.

As palavras de Lara apontam para a influência da observação dos registros desenhados para que chegasse a representar os pontos por letras e os subconjuntos, na forma de agrupamentos de três letras, em um registro bem próximo àquele da Teoria dos Conjuntos: “*foi difícil conseguir montar [referindo-se a uma “reta” de S], imaginar que aqueles três pontinhos sozinhos [indicando a Figura 4d]. Só agora quando eu fechei esse aqui [indicando o Diagrama de 18 Pontos] é que eu entendi mais [...], que eu vi que podia pegar esse [ainda apontando os pontos isolados e desenhados na Figura 4d] com esse. Assim, distante um do outro, sem passar pelos outros. Percebi que podia fazer um conjunto, não precisava nem ter desenhado [...] para poder substituir os diagramas por letras*”.

As palavras de Lara também apontam para uma outra interessante dimensão da entrevista: a da importância das perguntas realizadas e que dizem respeito às formas do traçado das “retas” de S desenhadas no Diagrama de 18 Pontos. Segundo a entrevistada,

foram estas perguntas que lhe trouxeram à consciência a ligação entre o registro com diagramas de Venn e aquele obtido a partir do caso particular da solução devida a imagens geométricas prototípicas, com nove pontos para  $S$ . Foi tal ligação que a levou à Figura 3c e à ruptura com a representação de “*reta euclidiana*” para “*reta de  $S$* ”, permitindo a observação da não influência de uma particular configuração de pontos na representação gráfica.

Lara ainda acrescenta que, para poder desenhar a Figura 11, onde apresenta a resposta no registro de Agrupamento de Letras, “*isso só ocorreu após a apresentação do Diagrama*”, pois afirma que desenhar retas foi prioritário e que somente após todo o processo da entrevista, percebia que “*não importa o desenho em si*”, mas é “*ponto qualquer*” e “*elemento qualquer do conjunto  $S$* ”. Afirma ainda que necessitou “*ter uma representação gráfica para conseguir pensar. Até para quebrar a reta que estava na minha cabeça*”.

Cumprе lembrar que Lara havia, de uma forma aparentemente inconsciente e quase desapercibida, rompido com a concepção de “*ponto euclidiano*”, que possibilitara a passagem para a representação mental de “*reta*” de  $S$  como “*um conjunto de 3 pontos quaisquer*” registrada na forma de Diagrama de Venn (vide 5.3).

Estas declarações finais da entrevistada sugerem que a inconsciência da inexistência de uma particular localização para cada “*ponto*” de  $S$  relativamente ao plano, não lhe possibilitava a conversão para um registro em uma linguagem simbólica discursiva. Somente frente ao processo provocado pela articulação entre os registros não discursivos para “*reta de 3 pontos do Diagrama*” e para “*três pontos quaisquer do Diagrama*” é que “*ponto*” do plano euclidiano se tornou “*ponto qualquer de  $S$* ” e em “*elemento qualquer*” de  $S$ , o qual pode ser denotado de uma forma simbólica por meio de uma letra qualquer. Apesar desta constatação, Lara não utiliza o sistema discursivo da Teoria dos Conjuntos e o sistema de Registro de Agrupamentos apresentado foi criado *ad hoc* e não é convencional à Matemática.

Por outro lado, cumprе salientar a declaração de Lara sobre a importância da realização de uma atividade como a aqui apresentada, frente à manifestação inesperada de imagens prototípicas euclidianas, quando se visa a “*tentar tirar a imagem da reta da minha cabeça e formar uma outra imagem*”: pois Lara afirma que a observação dos diferentes

registros gráficos poderia levar “a quebrar totalmente tabus que se tem na cabeça”, permitindo a conscientização do sujeito para o surgimento de imagens mentais prototípicas, inesperadas e incontroladas. Segundo declara, não lhe ocorrera outra imagem mental além da euclidiana, pois, “veio uma coisa clara, veio uma reta, reta. A palavra reta se sobressaiu na minha cabeça, ao resto das informações. Eu nem parei pra prestar a atenção que reta estava entre aspas, agora é que eu estou percebendo isso. Se você estivesse se referindo à reta, reta mesmo, não ia pôr entre aspas, a reta que eu estou pensando? Agora está tudo claro na minha cabeça. Mas no começo... Não estava mesmo!”.

Observa-se, portanto, que o processo desenvolvido por Lara, para a compreensão do significado abstrato de “ponto qualquer” de S e de “reta de três pontos”, não foi imediato, ao contrário, é bastante sinuoso e vem apontar a sua inter-relação com os conteúdos representados em cada registro semiótico. Aparentemente, a observação dos diferentes conteúdos registrados nos diversos registros da cadeia de representações é fundamental para tal compreensão. Isto vem ao encontro de Duval, para o qual “*toda representação é cognitivamente parcial em relação com o que ela representa e as representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceptual* (1995, p. 61)”.

Pelas palavras da própria Lara anteriormente exibidas, pode-se ponderar que o processo de resolução foi realizado por meio de um procedimento mental de compreensão dos termos “ponto“ e “elemento” de S, bem como de “reta“ de S, que relaciona e integra a seguinte cadeia de registros apresentados nas seguintes figuras ao longo da entrevista:

Figura 1d =>Figura 3c =>Figura 4d =>Figura do Diagrama b =>Figura 4d =>Figura 11

Desta forma, Lara aponta que o processo possibilitador da compreensão conceitual dos termos apresentados no enunciado do problema-objeto está intrinsecamente relacionado à coordenação das diversas conversões de registros consideradas na referida cadeia. Como conseqüência, julga-se ser lícito afirmar que Lara realiza um processo mental de *compreensão integrativa*, o qual é aparentemente fruto da compreensão das representações semióticas que procede à *coordenação de registros*. Lara aparentemente possui a

característica cognitiva identificadora do sujeito que tem o domínio deste processo de coordenação, isto é, aquela que permite ao sujeito poder se ater às representações semióticas em um único registro.

## 7. CONCLUSÕES

As considerações aqui arroladas confirmam a importância das observações de Duval sobre a compreensão integrativa de um objeto matemático, para o qual “*a compreensão conceitual parece estar ligada à descoberta de uma invariância entre as representações semióticas heterogêneas*” (1995, p. 61), a qual é “*decorrente da compreensão dos conteúdos dos registros das representações e procedente de uma coordenação integrativa de registros*” (1995, p. 69).

As dimensões advindas da observação da longa caminhada percorrida por Lara durante a entrevista, ao realizar as diversas conversões de registros e desconstruir as dificuldades cognitivas apresentadas, bem como as manifestações explícitas da entrevistada, vêm confirmar um aspecto da cognição observado por Duval e seus colaboradores, ou seja: a coordenação entre registros não pode ser somente consequência da apreensão conceitual, ao contrário é uma condição essencial (1995, p. 59-70; 2000, p. 63-65). Portanto, o sujeito que tenha desenvolvido suficientemente a coordenação de registros, e, realiza um processo mental de compreensão integrativa, na realidade, dispõe potencialmente de representações que provém de outros registros, as quais, de maneira latente, permanecem associadas àquela a qual o sujeito se utiliza. É este tipo de coordenação que lhes permite estabelecer procedimentos heurísticos, finalizar com sucesso os tratamentos realizados e controlar sua pertinência em atividades matemáticas (Duval, 2000, p. 61).

Observa-se que mesmo licenciados - como a professora aqui apresentada, a qual possui uma longa e profícua experiência com práticas relacionadas a atividades matemáticas - apresentam dificuldades na realização de conversões de registros. Além disso, como a entrevistada tanto enfatizou, observa-se que ela necessita realizar uma coordenação articulando uma ampla variedade de conversões entre registros para atingir a solução do problema, com vistas à suplantação das dificuldades encontradas,

principalmente daquelas surgidas devido à emergência de imagens conceituais geométricas euclidianas prototípicas e incontroladas. Portanto, o comportamento de Lara faz eco às palavras de Almouloud,

*“falar da conversão e da coordenação de registros significa colocar em jogo o problema da aprendizagem e disponibilizar ao professor instrumentos que deverão ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão da Matemática”* (2003, p. 125).

Com as reflexões aqui apresentadas, busca-se ampliar as discussões sobre as formas pelas quais adultos se confrontam com novos conhecimentos geométricos, discretos e não-euclidianos, com o fim de se contribuir para que tais saberes possam ser efetivamente introduzidos na Escola.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOU, Saddo A (2003) *Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Matemáticos*. In: Alcântara Machado, Silvia D. (Ed.) *Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica*. São Paulo: Papirus, 125-147.

BARBOSA, João Lucas M. (1995) *Geometria Euclidiana Plana*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

DUVAL, Raymond (1995) *Semiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques Et Apprentissages Intellectuels*. Berna: Peter Lang.

----- (2000) Basic Issues for Research in Mathematics Education. *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 55-70.

----- (2003) *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Alcântara Machado, Silvia D. (Ed.) *Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica*. São Paulo: Papirus, 11-34.

HERSHKOWITZ , Rina; VINNER, Shlomo (1983) The Role of Critical and non-Critical Attributes in the Concept Image of Geometrical Concepts. In: *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 223-228.

JORGE, Ana Maria B. et al. (1999) *Infinito-Matemática*, 12. Porto: Areal Editores.

KALEFF, Ana Maria M. R.. (2004) *Da Rigidez do Olhar Euclidiano às (Im)Possibilidades de (Trans)Formação dos Conhecimentos Geométricos do Professor de Matemática*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação-UFF. Niterói. 450 p.

MAGNANI, Lorenzo (2001) *Philosophy and Geometry: Theoretical and Historical Issues*. Dordrecht: Kluwer.

MAMMANA, Camelo; VILLANI, Vinicius (1998) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21<sup>th</sup> Century*. Dordrecht: Kluwer.

MEIRA, Luciano (1994) Análise Micro-Genética e Videografia: Ferramentas de Pesquisa em Psicologia Cognitiva. *Temas em Psicologia*, 3, 59-71.

MEC (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais–Matemática. 5<sup>a</sup>-8<sup>a</sup> Séries*. Brasília: MEC/SEF.

NCTM (1991) *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

PRESMEG, Norma (1997) *Generalization Using Imagery in Mathematics*. In: English, Lyn (Ed). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 299-312.