

ALUNOS DE 3ª E 5ª SÉRIES RESOLVENDO PROBLEMAS DE DIVISÃO COM RESTO DIFERENTE DE ZERO: O EFEITO DE REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS, SIGNIFICADOS E ESCOLARIZAÇÃO

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa – rborba@ce.ufpe.br

SELVA, Ana Coelho Vieira– Pós-graduação em Educação – UFPE –.

anaselva@globo.com

Agência Financiadora: PIBIC/UFPE – CNPq / FACEPE

(Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco)/ MCT/CNPq

(Setorial de Infra-Estrutura).

INTRODUÇÃO

O objetivo desta pesquisa foi o de investigar o efeito de representações simbólicas, de significados dados à divisão e de escolarização na resolução de problemas de divisão com resto diferente de zero.

A operação de divisão pode ter diferentes significados – como a *partição* na qual é dado um todo e a quantidade de partes em que o mesmo deve ser distribuído e o resultado é o valor de cada parte e a *quocição* na qual é dado um todo e o valor de cada parte que forma o todo, e o resultado consiste na quantidade de partes. Dois problemas de divisão podem ser respondidos por meio da mesma operação (13 dividido por quatro, por exemplo), mas podem envolver diferentes relações implícitas (como 13 maçãs para serem distribuídas entre quatro crianças – um problema de partição, ou 13 maçãs para serem colocadas em caixas nas quais cabem quatro maçãs por caixa – um problema de quocição). Embora, a partir da mesma operação aritmética, se possa resolver dois problemas distintos de divisão, o significado desta operação envolvido nos mesmos pode diferir.

O tratamento a ser dado ao resto obtido numa divisão depende do significado dado à divisão na situação-problema proposta. Em problemas de partição o tratamento adequado é a subdivisão do resto em partes iguais, de acordo com o número de partes no qual o mesmo deve ser distribuído. Assim, se uma maçã sobra numa distribuição entre quatro pessoas, pode-se subdividir a mesma – dando um quarto de maçã para cada uma. Nos problemas de quocição o tratamento dado ao resto é diferente: não faz sentido subdividir o resto – uma vez que, se isto for feito, contraria-se a quota pré-estabelecida – mas deve-se acrescentar um ao quociente, de modo que o todo seja esgotado. Assim, no problema de quocição anteriormente apresentado, se uma maçã sobra ao serem colocadas 13 maçãs em caixas nas quais cabem quatro maçãs, é necessário ter-se mais uma caixa para acomodar a que sobrou. Ao invés da resposta ser “três caixas” a resposta

deve ser “são necessárias quatro caixas”, sendo que três das caixas terão sua capacidade máxima ocupada (quatro maçãs em cada) e uma outra caixa será necessária para acomodar a maçã restante.

Diante da diferenciação de significados dados à divisão e do tratamento distinto que deve ser dado ao resto em cada caso, a presente pesquisa investigou se há alguma influência do significado dado à divisão – partição ou quotição – no tratamento que crianças dão ao resto de uma divisão. Também foi investigado se o resto de divisões é tratado diferentemente se os problemas forem resolvidos por meio de representações simbólicas distintas, tais como uso de algoritmos convencionais, heurísticas, representações pictográficas e desenhos. Observou-se, ainda, se alunos de diferentes séries resolvem problemas de divisão por uso de representações diferenciadas e se tratam o resto diferentemente, verificando, assim, de modo indireto, se a escolarização influencia o modo de resolver problemas de divisão e a maneira como restos são tratados.

Segundo Vergnaud (1982, 1997) todo conceito é composto por três dimensões: 1) situações que dão significado ao conceito, 2) as propriedades invariantes do conceito e 3) os sistemas simbólicos utilizados na representação do conceito. Embora as dimensões de um conceito sejam interligadas de um modo complexo e nem sempre se possa claramente fazer uma distinção de qual dimensão está sendo tratada quando da resolução de problemas, é possível experimentalmente manipular estas três dimensões e observar os efeitos isolados de cada uma e se há interação entre as mesmas.

Borba (2000, 2002) pesquisou o efeito das três dimensões sugeridas por Vergnaud – significados, invariantes e representações – na compreensão de problemas aditivos com números inteiros relativos. No total, 120 crianças de sete e oito anos de idade – bem antes de serem ensinadas na escola sobre o conceito de número inteiro relativo – foram entrevistadas sobre problemas que resultavam em números positivos ou negativos. Observou-se que o desempenho das crianças foi afetado pelos significados dados ao conceito de número relativo (medidas e relações) bem como as formas de representação utilizadas (implícitas ou explícitas) e as propriedades invariantes (de problemas diretos – final desconhecido – e inversos – início desconhecido).

O presente estudo utilizou o mesmo referencial teórico e metodológico utilizado por Borba (2000, 2002), mas investigou outro conceito matemático – a divisão com resto diferente de zero – no intuito de observar como o desempenho de crianças é

afetado pelos significados dados à operação de divisão e por diferentes formas de representação.

Os efeitos isolados das dimensões do conceito de divisão – significados da divisão, propriedades invariantes desta operação e possíveis representações – foram investigados em estudos anteriores (Desforges & Desforges, 1980; Kouba, 1986, 1989; Lautert & Spinillo, 2001; Li & Silver, 2000; Selva, 1993, 1998; e Silver, 1992, dentre outros) e a proposta da presente pesquisa é observar o que destes estudos anteriores é ou não replicado, sendo a principal contribuição do estudo a manipulação experimental de fatores combinados: significados dados à divisão e diferentes formas de representação na análise do resto. O desenvolvimento da compreensão de diferentes significados, do uso de diferentes formas de representação e das propriedades invariantes da divisão também foi objeto de investigação, uma vez que na pesquisa crianças de diferentes séries foram entrevistadas.

OBJETIVOS DO ESTUDO

Tinha-se como objetivo geral, investigar o efeito de significados dados à divisão (partição e quociação) e de representações simbólicas (algoritmos, heurísticas, desenhos e pictografias) na resolução de problemas de divisão com resto por parte de alunos do ensino fundamental (3^a e 5^a séries). Os objetivos específicos eram o de verificar se alunos de 3^a e 5^a série reconhecem a divisão como operação indicada para resolver problemas de partição e de quociação; observar que estratégias de resolução são utilizadas e o sucesso no uso das mesmas; e examinar se o resto é tratado adequadamente, isto é, se os restos em problemas de partição são subdivididos corretamente e se a presença de resto em problemas de quociação levam a um aumento do quociente como resposta.

A METODOLOGIA ADOTADA

Participantes

Participaram do estudo 32 alunos (16 de 3^a série e 16 de 5^a série) de duas escolas públicas da cidade do Recife. Estes foram selecionados dentre as 128 crianças participantes de um projeto mais amplo. Os 32 participantes eram as crianças que utilizaram lápis e papel para resolverem os problemas. As demais utilizaram outras formas de representação (a oral, o uso de manipulativos e o manuseio da calculadora) na resolução dos problemas. Os dados que aqui serão relatados e discutidos referem-se aos dos grupos das duas séries que responderam os problemas utilizando lápis e papel.

Procedimentos

Todas as crianças resolveram os mesmos 16 problemas de divisão com resto, que variavam em relação ao tipo de problema (partição e quociação). Os dividendos dos pares numéricos utilizados eram números variando entre 09 e 46 e como divisores os números oito e quatro.

A ordem de apresentação dos problemas também foi controlada. Metade das crianças de cada grupo iniciou por um problema de partição e metade por um problema de quociação.

Em relação ao contexto dos problemas, o mesmo sempre envolvia quantidades discretas, mas que são comumente particionadas pelas crianças, tais como sanduíches, bolinhos, morangos, maçãs, pêras, chocolates, etc. O contexto foi fixo para todos os testes.

As crianças foram entrevistadas individualmente e responderam os problemas em duas sessões (oito problemas em cada sessão). Os problemas eram lidos pelo experimentador e ficavam disponíveis para a criança ler quando quisesse.

Os dados das entrevistas foram gravados e transcritos em sua íntegra.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a coleta de dados das duas séries, os mesmos foram analisados de acordo com as seguintes comparações:

- resolução de problemas de partição x resolução de problemas de quociação,
- uso das diferentes formas de representação em lápis e papel,
- tratamento dado ao resto em problemas de partição x de quociação.

Em todas estas análises estava presente a comparação:

- desempenho dos alunos de 3^a x alunos de 5^a série.

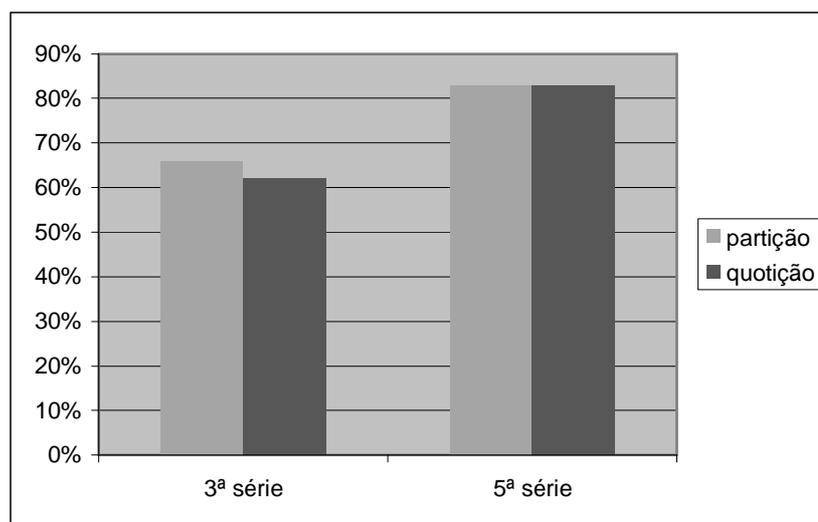
Esses dados foram analisados quantitativa e qualitativamente, no intuito de responder às questões:

- ◆ Alunos de 3^a e de 5^a série reconhecem a divisão como operação adequada para resolver problemas de partição e de quociação?
- ◆ Quais as representações mais utilizadas por alunos de 3^a e 5^a série ao resolverem problemas de divisão com resto?
- ◆ Como o resto é tratado por alunos de 3^a e 5^a série?

Resolução de problemas de partição x resolução de problemas de quocição

No Gráfico 1 pode-se observar as diferenças encontradas nos desempenhos dos alunos da 3^a e da 5^a série ao selecionarem e executarem estratégias adequadas para a resolução dos problemas com os dois significados da divisão – partição e quocição. Foram consideradas estratégias adequadas aquelas nas quais, de alguma forma, o todo era dividido corretamente e o resto encontrado também era o correto. Não era necessário que se tratasse o resto adequadamente (subdividindo-o em problemas de partição ou acrescentando um ao quociente em problemas de quocição) para ser considerada adequada a estratégia selecionada e utilizada pelo aluno. A escolha, ou não, de estratégias adequadas para tratar o resto refere-se a outra análise apresentada adiante.

Gráfico 1. Percentuais comparativos de desempenho dos alunos quanto às estratégias adequadas por significado de divisão envolvido.



A maioria dos alunos das duas séries desenvolveu estratégias adequadas à resolução de problemas de divisão. Na 3^a série foram usadas estratégias eficientes para 66% dos problemas de partição e 62% dos de quocição. Na 5^a série, 83% dos problemas de partição e 83% dos de quocição foram resolvidos por meio de estratégias corretas.

Observa-se que tanto na terceira quanto na quinta série os alunos desempenharam-se igualmente bem em problemas de partição e nos de quocição. Evidencia-se, assim, que os alunos desenvolveram estratégias de divisão adequadas para os dois significados desta operação. O melhor desempenho dos alunos de quinta série deve-se, provavelmente, pelo maior tempo de escolarização e, conseqüentemente, maior tempo de aprendizagem formal da operação de divisão.

Uso das diferentes formas de representação em lápis e papel

Na 3ª série cerca de 69% dos problemas foram resolvidos via representações pictográficas (com traços ou bolas representando os objetos descritos nos enunciados dos problemas) ou através de desenhos. Os demais problemas foram resolvidos via algoritmos ou heurísticas com quase nenhum sucesso. Na 5ª série cerca de 69% dos problemas foram resolvidos via algoritmo convencional, com elevado percentual de acerto no uso desta representação. No restante dos problemas foram utilizados isoladamente representações pictográficas, desenhos ou heurísticas ou uma combinação de duas ou três destas representações simbólicas. Na Tabela 1 pode-se observar as representações utilizadas pelas crianças das duas séries.

Tabela 1. Percentuais de uso das representações utilizadas por alunos de 3ª e 5ª séries ao resolverem problemas de divisão com resto.

Série	Pictografia	Desenho	Algoritmo	Heurística	Heurística e Algoritmo	Pictografia, Algoritmo e Heurística
3ª	44%	25%	25%	6%	-	-
5ª	13%	6%	69%	-	6%	6%

Observa-se, assim, que as crianças da terceira série bem sucedidas na resolução de problemas de divisão o faziam por meio de representações simbólicas mais pessoais e não padronizadas – pictografias e desenhos. O algoritmo formal não era uma representação à qual muitas crianças da terceira série recorriam. Diferentemente, os alunos da quinta série preferiram o uso de representações convencionais, ensinadas na escola. O baixo percentual de uso de heurísticas denota que este tipo de procedimento não é o preferido pelos alunos ou não tem sido estimulado na escola.

Tratamento dado ao resto em problemas de partição x de quociente

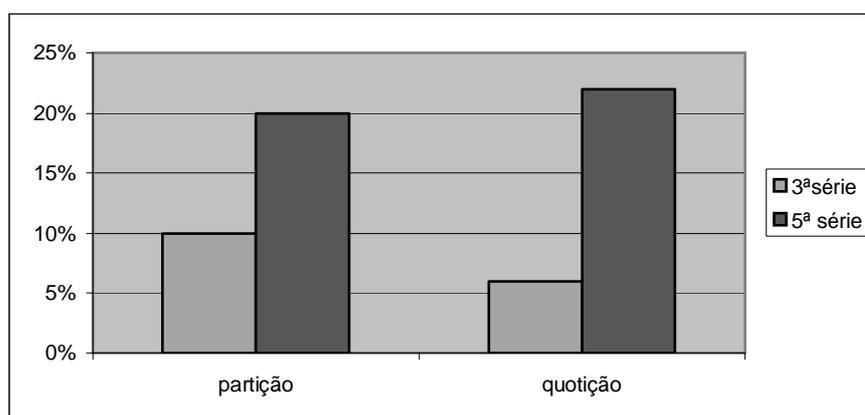
Conforme se pode observar no Gráfico 2, os alunos das duas séries tiveram dificuldades em tratar o resto das divisões pois 75% dos alunos da 3ª série e 82 % dos da 5ª série trataram o resto inadequadamente. O tratamento considerado adequado era a subdivisão do resto nos problemas de partição e o acréscimo no quociente nos de

quitação. Estes resultados denotam que da terceira para a quinta série nenhum avanço ocorreu no que concerne à compreensão de como tratar restos de divisões.

Na 3ª série o resto foi tratado adequadamente em 20% dos problemas de quitação e em apenas 10% dos de partição. Na 5ª série 22% dos problemas de quitação e somente 6% dos de partição receberam tratamentos adequados. Observa-se, assim, que a dificuldade em tratar o resto era generalizada, embora as crianças tenham se desempenhado um pouco melhor nos problemas de quitação.

Em geral, os alunos que trataram os restos adequadamente o fizeram auxiliados por representações pictográficas ou desenhos e estas estratégias eram mais eficientes para tratar o resto em problemas de quitação.

Gráfico 2. Percentuais de acerto no tratamento dado ao resto, de acordo com o significado de divisão (quitação/ partição) e da série.



Será apresentada, a seguir, uma análise qualitativa das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos de 3ª e 5ª séries e dos tratamentos que as mesmas deram ao resto.

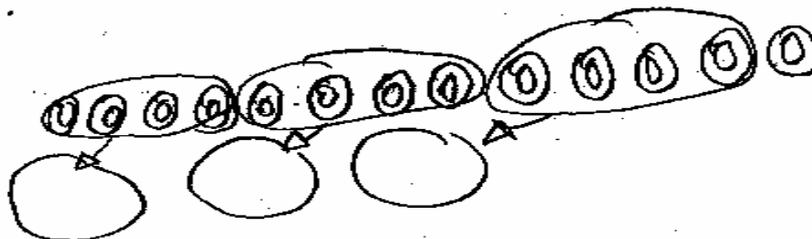
◆ Alunos de 3ª e de 5ª série reconhecem a divisão como operação adequada para resolver problemas de partição e de quitação?

Ao selecionarem estratégias, adequadas ou não, para resolverem problemas de divisão, algumas das crianças utilizaram os mesmos procedimentos para resolver todos os problemas, independente do significado de divisão neles contidos. Já outras crianças utilizaram estratégias diferenciadas, evidenciando que percebiam diferenças nas estruturas destes problemas.

O exemplo que segue é de uma criança da 3ª série que evidenciou perceber diferenças entre os significados de partição e de quitação. Ao resolver o problema de

quitação: “Para o picnic da escola Tia Rute preparou 13 cachorros quentes. Em cada prato cabem 4 cachorros quentes. Quantos pratos ela vai usar?”, a criança desenhou 13 bolinhas – representando os cachorros quentes – e as agrupou de quatro em quatro, conforme a reprodução de seu desenho na Figura 1.

Figura 1. A representação de uma criança de terceira série para um problema de quotição (13/4).

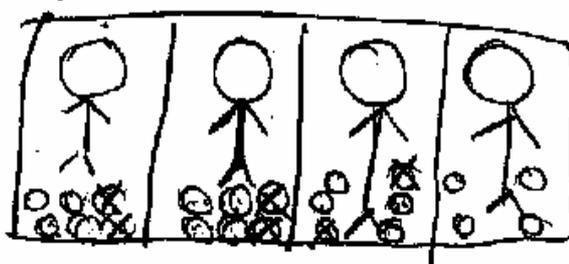


Na solução deste problema de quotição a criança separou as quotas – quatro cachorros-quentes por prato – e pode perceber que ainda sobraria um cachorro-quente. Ela poderia, então, ter concluído que seriam necessários quatro pratos, e não três, para acomodar todos os cachorros quentes. Ela, porém, respondeu que seriam necessários 3 pratos.

Ao resolver o problema de partição: “Pedro assou 17 espigas de milho para o lanche. Ele convidou 4 amigos para o lanche e quer que cada amigo receba a mesma quantidade de espigas de milho. Quantas espigas cada amigo vai receber?”, a mesma criança fez um desenho com outra estrutura (Figura 2), ou seja, no qual os objetos foram distribuídos entre os recipientes. A criança respondeu que cada amigo receberia quatro espigas.

Desta forma, observa-se que a criança percebia a diferenciação entre os significados de partição e de quotição e que sua representação a auxiliou na solução dos problemas, embora em nenhum dos dois casos tenha tratado o resto corretamente.

Figura 2. A representação de uma criança de terceira série para um problema de partição (17/4).



Diversos foram os erros das crianças ao utilizarem a representação com lápis e papel para resolverem os problemas de partição e quotição. Alguns destes erros eram relacionados ao uso da tabuada, ou seja, os alunos corretamente armaram operações de divisão, mas incorretamente solucionaram algumas poucas questões, como as observadas na Figura 3.

Figura 3. Os dois erros de tabuada efetuados por uma aluna de quinta série para um problema de partição (22:8) e outro de quotição (46:8).

4 - resposta .

$$\begin{array}{r} 82 \overline{) 22} \\ - 16 \\ \hline 04 \end{array}$$

5 - resposta .

$$\begin{array}{r} 26 \overline{) 46} \\ - 10 \\ \hline 10 \end{array}$$

Erros operacionais também foram observados quando representações pictográficas foram utilizadas. Uma aluna estava resolvendo o problema de partição “Sandra preparou 11 bolinhos de milho para o lanche e quer servi-los em 4 pratinhos. Ela quer que cada pratinho tenha a mesma quantidade de bolinhos. Quantos bolinhos vão ficar em cada pratinho?”. A aluna, por ‘tentativa e erro’, colocou três bolinhos nos três primeiros pratos e dois bolinhos no prato restante, conforme se pode observar na Figura 4.

Ela conclui que três pratos ficariam com três bolinhos e o quarto prato ficaria com apenas dois bolinhos. A criança não foi bem sucedida, pois não percebeu que precisaria testar outras alternativas, de modo que houvesse uma distribuição equitativa: com dois bolinhos em cada um dos pratos e três bolinhos sobrando. É possível que para esta criança o mais importante tenha sido distribuir o todo, mesmo que isso não significasse a obtenção de porções iguais.

Figura 4. Erro de uma aluna de quinta série ao resolver por ‘tentativa e erro’ o problema de partição 11:4.



Os erros cometidos – em algoritmos e em representações pictográficas – ocorreram quase que equitativamente em problemas de partição e de quotição. Este fato evidencia que os alunos reconheciam procedimentos de divisão como adequados a problemas com estes significados distintos. Assim, de modo geral, os alunos foram bem sucedidos em selecionar e executar estratégias adequadas para problemas de divisão, sejam os de partição, sejam os de quotição.

♦ **Quais as representações mais utilizadas por alunos de 3ª e 5ª série ao resolverem problemas de divisão com resto?**

Foram observadas quatro formas de representação simbólica na resolução dos problemas propostos: representação pictográfica, desenho, algoritmo e heurística. Tais representações também podiam ser utilizadas de forma combinada durante a resolução de um mesmo problema. As representações pictográfica e desenho consistiram no uso de algum símbolo para representar os dados do problema, entretanto nos desenhos os símbolos eram similares em forma aos objetos mencionados no enunciado do problema. Nas representações pictográficas traços ou círculos eram usados indiscriminadamente para bolos, frutas etc. Heurísticas referiram-se ao uso de multiplicações sucessivas na resolução dos problemas e o algoritmo consistia no uso do algoritmo convencional da divisão.

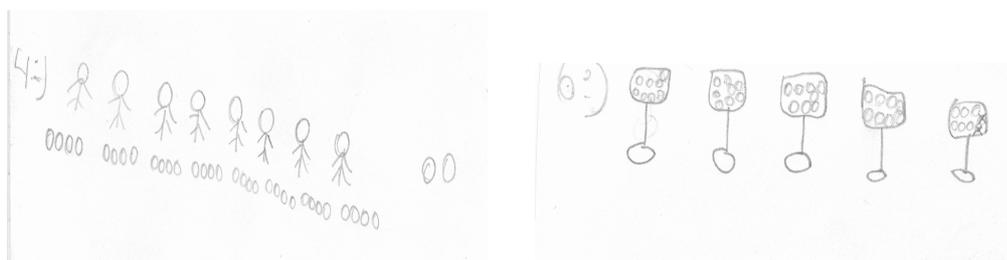
A representação simbólica mais comumente utilizada na terceira série foi o uso de desenhos ou pictografias e na quinta série foi o uso do algoritmo da divisão. Os alunos que usaram o algoritmo da divisão foram, em geral, bem sucedidos neste uso. Evidenciou-se, assim, que para números de dois dígitos sendo divididos por um dígito, a maioria dos alunos de quinta série não possuía dificuldades em operar por meio do algoritmo convencional.

Um número muito limitado de alunos de quinta série decidiu utilizar representações pictográficas ou desenhos para resolver os problemas. Os três alunos que utilizaram estas duas formas de representação foram bem sucedidos, sendo os percentuais de acerto na determinação do quociente e resto, 100, 100 e 87,5 %, respectivamente para o aluno que utilizou desenhos e para os dois que usaram

representações pictográficas. Evidencia-se, assim, que o uso de mais de uma forma de representação pode auxiliar na resolução de problemas. Resolver, por exemplo, um problema de divisão por meio do algoritmo convencional e depois definir como tratar o resto a partir de um desenho ou de uma representação pictográfica pode ser uma estratégia eficiente de resolução de problemas de divisão com resto diferente de zero. Isto porque o desenho ou pictografia possibilita ao aluno visualizar o que restou e como poderá subdividi-lo em problemas de partição ou como necessitará aumentar o quociente em uma unidade nos problemas de quotição.

A Figura 5 mostra a solução de um aluno que utilizou desenhos para solucionar os problemas. O problema de partição era sobre 34 maçãs sendo distribuídas entre oito crianças e o de quotição era sobre a colocação de 38 morangos em taças nas quais cabiam 8 morangos por taça. Nesse caso os desenhos do aluno não apenas o auxiliaram na resolução dos problemas como foram úteis na sua compreensão do que deveria fazer com o resto, conforme será discutido na seção seguinte.

Figura 5. Os desenhos produzidos por um aluno de quinta série para resolver problemas de partição (34:8) e quotição (38:8).



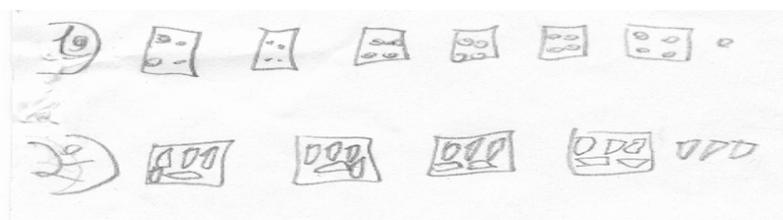
Os dois alunos da 5ª série que utilizaram representações pictográficas o fizeram de maneira diferenciada: um usou as representações para auxiliá-lo em suas resoluções dos problemas (Figura 6) e outro resolveu os problemas mentalmente e apenas registrava em representação pictográfica a resposta obtida (Figura 7). A evidência de que as representações da Figura 7 eram efetuadas após a solução mental é que o aluno de imediato representava a resposta e não ia gradativamente obtendo a mesma por intermédio de suas representações. Diferentemente, na Figura 6 observa-se que o aluno inicialmente representou o todo e utilizou estratégias diferenciadas para resolver os problemas: o de 13 chicletes para serem distribuídos com quatro crianças e o de 15 pêras a serem colocadas em sacos os quais possuíam capacidade de quatro pêras por saco.

Figura 6. As representações pictográficas produzidas por uma aluna de quinta série para resolver problemas de partição (13:4) e quocição (15:4).



Alunos de quinta série ao resolverem problemas de divisão preferem fazê-lo por meio do algoritmo convencional e muito poucos parecem ainda necessitar de recursos auxiliares, tais como desenhos ou representações pictográficas, para ajudá-los na compreensão dos problemas. Estes recursos auxiliares podem ser utilizados, ou não, de forma diferenciada para problemas de partição e problemas de quocição mas os dados aqui obtidos parecem indicar que a maioria dos alunos de quinta série escolhem as mesmas estratégias de resolução, independentemente do significado da divisão envolvido no problema.

Figura 7. As representações pictográficas produzidas por um aluno de quinta série para resolver problemas de partição (25:4) e quocição (23:4).



◆ **Como o resto é tratado por alunos de 3ª e 5ª série?**

A estratégia mais comumente observada na análise até aqui efetuada tem sido a de dar um novo fim ao resto, independente do tamanho do mesmo. O novo fim em geral consiste em dar o resto a um recipiente não mencionado no enunciado do problema: “ficava pra mim”, “eu comia”, “dava para a minha professora”, “eu como porque eu gosto muito de pizza”, “eu dou pra minha mãe pois eu não gosto de morango”, “guardava”, “botava no fruteiro”, dentre muitos outros fins descritos pelas crianças, principalmente entre os alunos da 3ª série.

Como a maioria dos alunos de 5ª série apresentou um desempenho bem sucedido em selecionar uma operação adequada à resolução do problema, desejava-se observar se, após efetuar corretamente a operação, os alunos saberiam tratar adequadamente o

resto. Em problemas de partição o tratamento adequado – para que o todo se esgote e que cada recipiente receba a mesma quantidade – é subdividir o resto em frações eqüitativas, obtendo-se, assim, como resposta um número fracionário ou decimal. Já em problemas de quotição – para que a quota máxima não seja ultrapassada e o todo se esgote – é necessário que um novo recipiente seja acrescentado, ou seja, o quociente será acrescido de uma unidade.

Na maioria dos problemas (cerca de 82%) os alunos de quinta série não trataram de forma adequada o resto. Em apenas 6 % dos problemas de partição e 22% dos de quotição os alunos trataram o resto adequadamente. O maior percentual de acerto no tratamento dado ao resto nos problemas de quotição deve-se à maior facilidade dos alunos perceberem que nestes problemas é preciso acrescentar mais um recipiente para que o todo seja esgotado do que em perceber a necessidade de subdividir eqüitativamente o resto em problemas de partição.

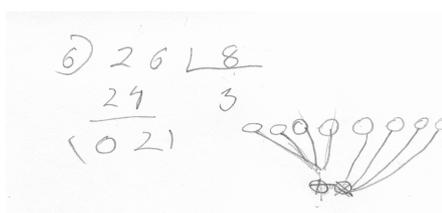
O aluno que produziu as soluções apresentadas na Figura 5, anteriormente discutida, resolveu todos os problemas por meio de desenhos. Ele foi capaz de tratar adequadamente o resto em cinco dos oito problemas de quotição, embora tenha tratado inadequadamente o resto em todos os problemas de partição. Ao tratar o resto em problemas de partição, como o exemplificado na Figura 5, ele dava um novo fim ao resto obtido. Assim, no problema no qual 34 maçãs foram distribuídas para oito crianças, o aluno respondeu que as duas maçãs que restaram poderiam ser dadas a outras pessoas não constantes do enunciado do problema. Já nos problemas de quotição o aluno ia preenchendo recipientes mencionados no problema até o todo ser esgotado. No lado direito da Figura 5 está a solução deste aluno para o problema no qual 38 morangos deveriam ser acomodados em taças que tinham a capacidade máxima de oito morangos por taça. O aluno desenhou quatro taças com oito morangos em cada e acrescentou mais uma taça para os morangos restantes. Como cada taça poderia conter até oito morangos ele inicialmente desenhou oito na última taça e depois riscou dois, uma vez que apenas seis morangos tinham restado. Ele afirmou que seriam necessárias cinco taças para acomodar todos os 38 morangos.

Os alunos mais bem sucedidos em tratar o resto foram os que utilizaram outras estratégias além do uso do algoritmo convencional. A Figura 8 mostra como um aluno aliou à sua solução, via algoritmo, uma representação pictográfica e, assim, conseguiu tratar corretamente o resto em alguns problemas de partição. Parece que o algoritmo convencional ao se distanciar dos dados do problema favorece a perda de

significado do mesmo, levando os alunos a analisarem os resultados apenas a partir do algoritmo e não dentro do contexto do problema.

O problema apresentado ao aluno era “Em uma festa de aniversário, a mãe de João tinha 26 chicletes para serem dados a 8 crianças. Ela quer que cada criança receba a mesma quantidade de chicletes. Quantos chicletes cada criança vai receber?”. O aluno efetuou a operação via algoritmo e depois representou a sua solução para o resto: os oito círculos em cima representavam as oito crianças e os dois embaixo representavam os chicletes que haviam sobrado. A criança subdividiu cada um dos chicletes em quatro e ‘deu’ uma quarta parte para cada uma das crianças. Apesar de ter tratado adequadamente o resto este aluno não sabia como denominar a fração obtida e afirmou, quando questionado sobre quantos chicletes cada criança iria receber: “Três e meio. Três e um pedaço”.

Figura 8. A solução de um aluno de quinta série para resolver o problema de partição 26:8.



Os erros mais freqüentes dos alunos tanto em aluno de 3^a a 5^a série ao tratarem os restos obtidos foram:

a) Achar não ser possível dar algum tratamento ao resto. Neste caso os alunos afirmavam que não havia o que fazer com o resto. Esta estratégia pode ter sua base no próprio contrato didático realizado em sala de aula, em que o professor ao trabalhar com os números naturais, muitas vezes diz às crianças que ao acharem um resto, o mesmo deve ser deixado.

b) Dar um novo fim ao resto. Neste tipo de erro as crianças afirmavam que elas mesmas ficariam com o resto ou que o resto deveria ser dado a uma outra pessoa não mencionada no enunciado do problema. Algumas respostas com este tipo de erro eram: “Eu guardava (o resto) para a próxima festa” ou “Eu dava (os três restantes) a três pessoas que tivessem me ajudando”.

c) Admitir que há um resto mas, ao invés de tratá-lo adequadamente, redistribuí-lo de forma que os recipientes recebem quantidades não equitativas (nos problemas de partição) ou as quotas são alteradas (nos problemas de quotição).

Um dos alunos ao resolver a questão sobre a divisão de 25 maçãs para 4 crianças respondeu: “Três iam receber seis e um ia receber sete”. Outro aluno apresentou como resposta para o problema no qual 25 sanduíches deveriam ser acomodados em bandejas nas quais cabiam até 4 sanduíches: “São seis bandejas. Cinco com quatro sanduíches e uma com cinco sanduíches”.

d) Tratar restos de problemas de partição como se fossem de quotição. Um aluno ao resolver um problema de partição no qual 15 bolinhos de milho deveriam ser distribuídos em 4 pratinhos, efetuou corretamente a divisão e afirmou que colocaria o que havia sobrado – três bolinhos – em um outro prato, sendo então necessários 5 pratos ao todo. Este seria um tratamento adequado se o problema fosse de quotição.

e) Tratar restos de problemas de quotição como se fossem de partição, evidenciando uma perda dos referentes dados no problema. Um aluno, ao resolver a questão na qual 22 laranjas deveriam ser acomodadas em cestas com capacidade máxima de oito laranjas, corretamente efetuou uma divisão obtendo dois no quociente e seis de resto. Ele redistribuiu este resto (seis) entre as duas cestas (que havia obtido no quociente da divisão) afirmando, “Botava três em cada uma... Fica 11 laranjas em cada cesta (as oito originais mais metade das que tinham sobrado)”. O aluno tratou de forma errada o resto ao utilizar a redistribuição – estratégia adequada para problemas de partição mas não de quotição. A subdivisão não foi, portanto, das seis laranjas (resto) por oito (divisor) mas sim por dois (quociente), evidenciando que o aluno havia, a esta altura, confundido os referentes do problema.

f) Ter dificuldade em obter um número racional correto. Alguns alunos corretamente decidiam subdividir o resto em problemas de quotição mas esbarravam na dificuldade em efetuar a subdivisão ou em nomear a fração obtida. Divisões como $26:8$ e $15:4$, com restos 2 e 3, respectivamente, não eram fáceis para os alunos pois implicavam em subdividir 2 por 8 e 3 por 4. Até mesmo quando a subdivisão era efetuada corretamente, subdividindo o resto ‘um’ por ‘quatro’ na divisão $17:4$, por exemplo, a fração obtida era, na maioria das vezes, denominada ‘meio’.

CONCLUSÕES

Nos dados aqui apresentados pode-se observar que nas duas séries a maioria dos alunos escolheu estratégias adequadas tanto para os problemas de partição quanto para os de quotição, evidenciando, assim, que alunos de 3^a e 5^a séries compreendem igualmente problemas com estes dois significados. Apesar de algumas crianças procederem diferentemente para a solução dos dois tipos de problemas, a maioria delas tratou os restos das divisões da mesma forma – independente de serem problemas de partição ou de quotição. Estes dados confirmam estudos anteriores (Selva, 1993, 1998, dentre outros) que também não verificaram diferenças no desempenho de crianças entre problemas de partição e quotição, bem como observaram que o tratamento dado ao resto era realizado de forma independente ao tipo de problema.

Embora estratégias eficientes de resolução tenham sido escolhidas, observou-se que as formas de representar os problemas variaram nas séries e que muitos dos alunos bem sucedidos o eram ao usar mais de uma forma de representação simbólica. Os resultados, assim, reforçam a postura de Vergnaud (1997) que afirma que na resolução de problemas o uso de diferentes formas de representação simbólica deve ser estimulado para que diferentes aspectos dos conceitos sejam realçados. Estes dados sugerem que na escola deve-se estimular a utilização de estratégias variadas – desenvolvidas pelos próprios alunos e algoritmos convencionais – sempre baseadas na compreensão.

Os desempenhos dos alunos de 5^a série foram superiores aos dos alunos de 3^a série, como esperado, uma vez que os alunos da série mais avançada possuem maiores experiências escolares e extra-escolares com a divisão. É preocupante, porém, que as dificuldades sentidas pelos dois grupos de alunos quanto ao tratamento que devem dar ao resto é o mesmo, demonstrando-se que a escola pouco tem trabalhado este aspecto da divisão.

O tratamento inadequado dado ao resto nas duas séries evidencia a necessidade de se trabalhar mais cuidadosamente este aspecto da resolução de problemas de divisão. Sugere-se que o uso de representações variadas, um estudo significativo do número racional e um trabalho com resolução de problemas que valoriza a discussão das relações envolvidas e o retorno ao enunciado do problema após a sua resolução podem auxiliar os alunos na compreensão de como devem tratar o resto em problemas de divisão. Embora os alunos reconheçam a divisão como operação adequada à resolução de problemas de partição e de quotição não são, em geral, bem sucedidas em darem um tratamento adequado ao resto destes problemas. Representações auxiliares – como

representações pictográficas ou desenhos – podem ajudar na compreensão do que fazer com o resto de uma divisão.

O conhecimento de como crianças lidam com o resto de divisões de acordo com significados dados a esta operação, dos tamanhos do resto a serem tratados e das formas de representação utilizadas para resolver os problemas pode em muito auxiliar o trabalho em sala de aula. Ao se conhecer mais profundamente os fatores que afetam a compreensão das crianças da operação de divisão, o professor poderá mediar de forma mais eficiente a aprendizagem deste tão importante conceito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borba, R. & Nunes, T. Are young children able to represent negative numbers? In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Hiroshima University: p. 145, 2000.

Borba, R. *The effect of number meanings, conceptual invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers*. Tese de Doutorado. Oxford Brookes University, 2002.

Desforges, A. e Desforges, C. Number-based strategies of sharing in young children. *Educational Studies*, 6, p. 97-109, 1980.

Kouba, V. How young children solve multiplication and division word problems. *Paper presented at the National Council of Teachers of Mathematics Research Pre-session*, Washington, D.C., 1986.

Kouba, V. Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 2, p. 147-158, 1989.

Lautert, S. e Spinillo, A. Definindo a divisão e resolvendo problemas de divisão: as múltiplas facetas do conhecimento matemático. In *Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática*. Universidade Católica do Paraná: p. 61-79, 2001.

Li, Y. & Silver, E. Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, p. 233-246, 2000.

Selva, A. *A influência de diferentes tipos de representação na resolução de problemas de divisão*. Dissertação de Mestrado. UFPE, Mestrado em Psicologia, 1993.

Selva, A. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. Schliemann, A. & Carraher, D. (orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e Pesquisa*. São Paulo, Papirus Editora: p. 95-119, 1998.

Silver, E., Mukhopadhyay, S. & Gabriele, A. Referential mappings and the solution of division story problems involving remainders. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14 (3), p. 29-39, 1992.

Vergnaud, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective*, p. 39-59, 141-161, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

Vergnaud, G. The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective*, p. 5-28, Psychology Press Ltd. Publisher, 1997.