

CAPTURANDO REGISTROS SEMIÓTICOS E SUAS CONVERSÕES: UM INSTRUMENTO PARA A INVESTIGAÇÃO DE ATIVIDADES MATEMÁTICAS QUE ENVOLVEM REGISTROS GRÁFICOS

Ana Maria M. R. Kaleff-UFF

anakaleff@vm.uff.br

GT: Educação Matemática/ n° 19

1. APRESENTAÇÃO

Este artigo trata da apresentação de um instrumento de captação e análise de dados advindos de entrevistas, nas quais se busca capturar a evolução do processo desenvolvido pelo sujeito na elaboração de atividades matemáticas que envolvem a utilização de registros gráficos. Neste caso peculiar de investigação de cunho qualitativo, nem sempre comum às pesquisas educacionais, as entrevistas envolvem dados advindos de três diferentes dimensões semióticas. Por um lado a língua natural - no Brasil, a língua portuguesa - presente em qualquer processo de entrevista e, pelo outro, os sistemas de registros semióticos, apropriados ou não a uma atividade matemática, que podem apresentar tanto cunho discursivo, expressado na forma de uma linguagem simbólica, quanto não-discursivo, caracterizado por meio de traçados de gráficos e desenhos.

Apresenta-se a metodologia para a elaboração e a utilização do instrumento de pesquisa denominado *Seqüência Histórica de Construção dos Registros Gráficos*, indicado doravante por SHCRG, cujo ferramental metodológico surgiu no desenrolar de uma investigação envolvendo um grupo de discentes de curso de formação continuada para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, no nível de pós-graduação *lato sensu*. A pesquisa da qual se originou este instrumento, obteve seus dados a partir de entrevistas semi-estruturadas que apresentavam como fio condutor as etapas de resolução de um problema de Matemática Discreta, aqui designado como *problema-objeto*, o qual também é adotado como atividade introdutória às Geometrias não-Euclidianas.

A análise das entrevistas foi orientada segundo o enfoque das características micro-genéticas de cada instante da entrevista. Esta análise é inspirada em duas linhas teóricas, aparentemente disjuntas, mas que se complementam. Por um lado, pela *análise cognitiva de registros semióticos de uma atividade matemática*, baseada na conversão entre dois registros semióticos representantes de um mesmo objeto matemático,

conforme proposta por Raymond Duval. Por outro, pela *análise micro-genética interpretativa* de uma entrevista, no sentido considerado por Luciano Meira.

A SHCRG surgiu da necessidade de, no caso de uma análise micro-genética, se atribuir aos registros gráficos gerados pelo entrevistado o mesmo potencial sequencial temporal presente na transcrição de um diálogo. Por ser implementável em computador eletrônico a SHCRG se vale da funcionalidade dialética do meio computacional, a qual se manifesta através da potencialidade de edição dos elementos de um registro gráfico e torna possível uma desconstrução, e posterior reconstrução, de um registro original na forma de um conjunto de registros parciais que representam a evolução deste registro original ao longo do procedimento de resolução do problema.

No que se segue, apresentam-se inicialmente os pressupostos teóricos envolvidos neste estudo e a metodologia pormenorizada de elaboração e de utilização da SHCRG. A seguir, apresenta-se, de forma breve, o problema-objeto arrolado na presente investigação, acompanhado de uma proposta de solução. Finalmente, apresenta-se um exemplo de aplicação da SHCRG no processo de análise de uma entrevista. Neste exemplo, mostra-se como este instrumento permite capturar os sistemas de registros semióticos utilizados no processo de resolução do problema, as conversões entre dois registros e como estas, por sua vez, possibilitam perceber de que forma o sujeito entende os objetos matemáticos envolvidos no procedimento de resolução.

Este exemplo de aplicação trata do acompanhamento da resolução do problema-objeto elaborada por Maria, 38 anos, professora de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, com dezesseis anos de formação e prática educacional, cuja licenciatura e formação continuada foram amplamente influenciadas por teorias relacionadas à Lógica e Fundamentos de Matemática, fundamentadas na Teoria dos Conjuntos.

2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

A pesquisa aqui tratada é, conforme já se mencionou, de caráter qualitativo e micro-genético, pois é voltada para a captura dos pormenores cognitivos subjacentes à estratégia de resolução do problema-objeto adotada pelo sujeito.

Uma abordagem micro-genética interpretativa, conforme Meira, “*baseia-se fortemente na apresentação de narrativas e explicações detalhadas dos fenômenos investigados, com pouco ou nenhum uso de esquemas tradicionais de caracterização de*

estratégias” (1994, p. 61). Tal abordagem vem ao encontro dos pressupostos assumidos para o presente estudo, na medida em que, uma análise micro-genética é direcionada por dois princípios. O primeiro é o de que a análise de processos é sempre mais informativa do que a descrição de produtos. O segundo, complementar ao primeiro, é o de que a análise deve inspecionar as ações em seus pormenores, sem que, no entanto, o significado da atividade como um todo seja negligenciado.

Para a elaboração da análise dos diferentes registros gráficos apresentados na entrevista, buscou-se a orientação teórica em DUVAL (1995; 2003) no que se refere aos aspectos relativos a uma pesquisa cognitiva envolvendo registros de atividades matemáticas expressos de diferentes formas, discursivas e não-discursivas. Assim como Meira, Duval considera que a importância de uma abordagem cognitiva está em procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilita ao indivíduo compreender, controlar e efetuar, ele próprio, a diversidade de procedimentos matemáticos que lhe são propostos.

Por outro lado, Duval considera ainda que a originalidade de uma atividade matemática se caracteriza pela mobilização simultânea de, ao menos, dois tipos de registros de representação, e na possibilidade de se realizar conversões entre registros a todo o momento. Desta forma, a ação decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão de conceitos e objetos matemáticos se caracteriza pela colocação, em situação de observação, de dois tipos radicalmente diferentes de transformações de representações semióticas: a do *tratamento*, realizada pelo sujeito dentro de um mesmo registro semiótico e a da *conversão*, realizada pelo sujeito entre dois sistemas semióticos de representação, os quais conservam a referência aos mesmos objetos matemáticos.

A transformação de conversão, segundo Duval, potencializa o estabelecimento de uma forma poderosa de análise dos componentes pertinentes ao conteúdo de dois registros semióticos de uma representação de um objeto matemático. Pois é no ato da conversão da representação de um objeto matemático, de um registro para outro, que o indivíduo é avaliado quanto ao seu efetivo entendimento matemático do objeto.

Por outro lado, é importante se salientar que este tipo de análise de uma atividade matemática permite, não somente o estabelecimento de variações cognitivas próprias ao funcionamento de cada sistema ou registro semiótico envolvido na atividade, como também propicia a observação das variações semióticas, que determinam o funcionamento de cada registro.

Uma análise cognitiva da conversão de registros semióticos é, portanto, baseada na exploração das variações de congruência semântica, surgidas no caso da conversão entre dois diferentes registros semióticos de representação, discursivos ou não, referentes a um mesmo objeto matemático.

Comungando com Duval, neste estudo partiu-se da hipótese de que o sujeito, ao passar de um registro semiótico (por exemplo, expressado na língua natural) no qual o enunciado do problema-objeto se apresenta para outro (discursivo, ou não), deixa perceber neste registro de chegada, de que maneira entende o conteúdo dos objetos matemáticos arrolados no enunciado, isto é, as unidades elementares de significado relacionadas no enunciado do problema. Resumidamente, pode se dizer que este método de observação de conversão de registros, permite discriminar, entre as variações possíveis das representações de um objeto matemático para o sujeito, aquelas que são cognitivamente importantes. Cabendo salientar, que as variações cognitivas, que desta maneira são colocadas em evidência, o são sempre relativamente a um sistema de registros de representação, o que permite evidenciar os fenômenos de congruência e não-congruência entre dois registros envolvidos na conversão.

Como se construir e implementar um instrumento de pesquisa que efetivamente permita a observação micro-genética dos sistemas de registros e das conversões entre dois registros realizadas em uma entrevista, é o que se apresenta a seguir.

3. A COLETA DE DADOS PARA A ELABORAÇÃO DA SEQÜÊNCIA HISTÓRICA DE CONSTRUÇÃO DOS REGISTROS GRÁFICOS

Nos procedimentos de coleta de dados a partir de uma entrevista para a elaboração do instrumento de pesquisa SHCRG, devem ser utilizadas duas modalidades de ações, as quais possuem dimensões bem diferenciadas, porém complementares. A primeira constitui-se na coleta dos dados por meio de um registro videográfico, a segunda, deve ser criada no transcorrer da entrevista, e constitui-se de um conjunto de anotações manuais, realizadas pelo entrevistador, as quais visam dar um suporte auxiliar à construção da SHCRG. Este conjunto de anotações é designado por *Relatório de Acompanhamento*.

No registro videográfico das entrevistas individuais deve ser utilizado, no mínimo, uma câmera fixa na busca de se explorar o potencial apresentado pela videografia, no que concerne ao registro de ações comunicativas e gestuais. Esta particularidade é relevante para o desenvolvimento de pesquisas como as aqui tratadas,

na medida em que a videografia se apresenta como uma ferramenta que permite a captação minuciosa da seqüência de ações do entrevistado, não somente ao registrar suas falas e seus gestuais (facial e manual), bem como a de seus registros semióticos.

No caso de utilização de um número maior de câmeras fixas, sugere-se que, ao menos uma delas, focalize diretamente o campo no qual o sujeito realiza os registros gráficos. Não se recomenda a utilização de câmeras móveis, para se evitar interferências externas, além daquela do entrevistador, no comportamento do entrevistado

Por sua vez, o conjunto de anotações manuais, designado por *Relatório de Acompanhamento*, é realizado pelo entrevistador em sincronia com o surgimento dos registros grafados pelo entrevistado. Deste relatório deve constar a evolução dos traçados, sejam desenhos ou letras, realizados pelo entrevistado no decorrer da entrevista.

4. A ELABORAÇÃO DA SEQÜÊNCIA HISTÓRICA DE CONSTRUÇÃO DOS REGISTROS GRÁFICOS

Inicialmente, cabe salientar alguns esclarecimentos sobre a necessidade da adoção da SHCRG e sobre as características deste instrumento.

A adoção da SHCRG é produto da necessidade de se prover os registros grafados pelo entrevistado do mesmo potencial seqüencial temporal permitido pelo diálogo em uma análise micro-genética. Ou seja, a SHCRG visa a relatar o histórico da criação de cada traço ou letra produzidos pelo entrevistado, disponibilizando uma *história em quadros* da seqüência de registros realizados. Para tanto, cada registro desta seqüência corresponde a um instantâneo e, portanto, a um momento da realização do traçado pelo entrevistado de um registro gráfico em desenvolvimento. Este momento fica bem caracterizado no decorrer da entrevista, quando o instante, em que se dá tal traçado, é relacionado a uma determinada intervenção do diálogo. Como se verá mais adiante, a SHCRG é formada pelo total de registros e este instrumento tem um papel análogo ao de uma *narrativa histórica* da construção de cada um dos registros apresentados pelo sujeito.

A expressão *narrativa histórica* aqui utilizada foi inspirada em Walter Benjamin, para o qual uma narrativa é:

“num certo sentido uma forma artesanal de comunicação. Ela não está interessada em transmitir o ‘puro em si’ da coisa narrada como uma informação ou um relatório. Ela mergulha a coisa na vida do

narrador para em seguida retirá-la dele.” (BENJAMIN,1985, p. 205).

Com este instrumento, obtém-se, não somente um documento com informações na forma de um relato do conjunto dos traçados esboçados pelo sujeito para a obtenção de cada registro original, mas também um instrumento que permite o acompanhamento da *evolução* dos traços e um *mergulho* na *vida dos traçados* realizados pelo sujeito. Por sua vez, na medida em que cada registro apresentado na SHCRG corresponde a um momento da entrevista, este pode ser determinado por uma intervenção do diálogo, ficando, desta maneira, estabelecida uma evolução temporal do desenvolvimento desses registros, e, portanto, a expressão *narrativa histórica* se completa.

Desta forma, a SHCRG desenvolvida durante o processo de uma entrevista, apresenta as múltiplas transformações das representações semióticas, não-discursivas e discursivas, estabelecidas pelo entrevistado, com exceção do registro na língua natural; pois nesta seqüência encontram-se registradas tanto as transformações do tipo tratamento, realizadas no interior de um mesmo sistema de registros semióticos, quanto aquelas do tipo conversão, realizada entre dois registros diferentes.

Seguem-se os procedimentos necessários à elaboração computacional de uma SHCRG.

4.1 PROCEDIMENTOS PARA PREPARAÇÃO E REALIZAÇÃO DA SHCRG

Anteriormente à entrevista o pesquisador deve preparar um bloco de folhas de papel, tipo ofício e de diversas cores, no qual cada folha deve estar subdividida em seis regiões retangulares, indicadas por Figura 1, Figura 2 etc.

O decorrer da entrevista procede como a seguir.

4.1.1 PROCEDIMENTOS PREPARATÓRIOS DA SHCRG

No início da entrevista, fornece-se ao entrevistado o bloco de folhas, esclarecendo ainda que os locais indicados por Figura 1, Figura 2 etc, se destinam a alojar as suas anotações, caso tenha necessidade de escrever ou desenhar durante a entrevista. Solicita-se ainda que não seja apagado nenhum dos elementos gráficos que venha a desenhar (solicitação que, por vezes, é desobedecida!)

O entrevistador deve compilar, manualmente, ao longo da entrevista, o *Relatório de Acompanhamento*.

Cumpra mencionar que, no registro videográfico, a coloração das folhas sobre as quais o sujeito trabalha, permite ao pesquisador acompanhar de maneira mais acurada, no transcorrer dos procedimentos de análise, o momento em que os traçados são realizados e, assim, mais facilmente relacioná-lo com a respectiva intervenção no diálogo.

4.1.2 PROCEDIMENTOS PARA CONCRETIZAÇÃO DA SHCRG EM MEIO ELETRÔNICO

Inicialmente, usando-se um *scanner* fazem-se cópias de toda a documentação gráfica gerada pelo entrevistado. Estas cópias dos traçados originais forma um documento referenciado neste estudo como *Seqüência Condensada de Registros Originais*. No Quadro 1, apresenta-se um exemplo deste tipo de seqüência conforme realizada pela professora Maria.

Dando prosseguimento à elaboração da SHCRG, copia-se, por meio de um *software* de editoração de imagens, cada uma das figuras da Seqüência Condensada de Registros Originais. É a partir da desconstrução eletrônica de cada uma destas figuras que será criada a SHCRG.

Antes de iniciar o processo de montagem da SHCRG, note-se ainda que é necessário realizar uma preparação e uma revitalização do material digitalizado. Primeiramente, deve-se efetuar uma limpeza eletrônica da cópia, em relação aos traços que sejam superabundantes, que eventualmente tornem ininteligíveis algum dos elementos a serem analisados ou que sejam incoerentes com o contexto do traçado. Tais traços geralmente se apresentam na forma de pequenos pontos, borrões, linhas de pequena espessura etc., resultantes de um tipo de *gesticulação gráfica* aleatória realizada pelo entrevistado. Este é o caso, por exemplo, de traços como aqueles que podem ser observados na parte direita da Figura 2, no Quadro 1.

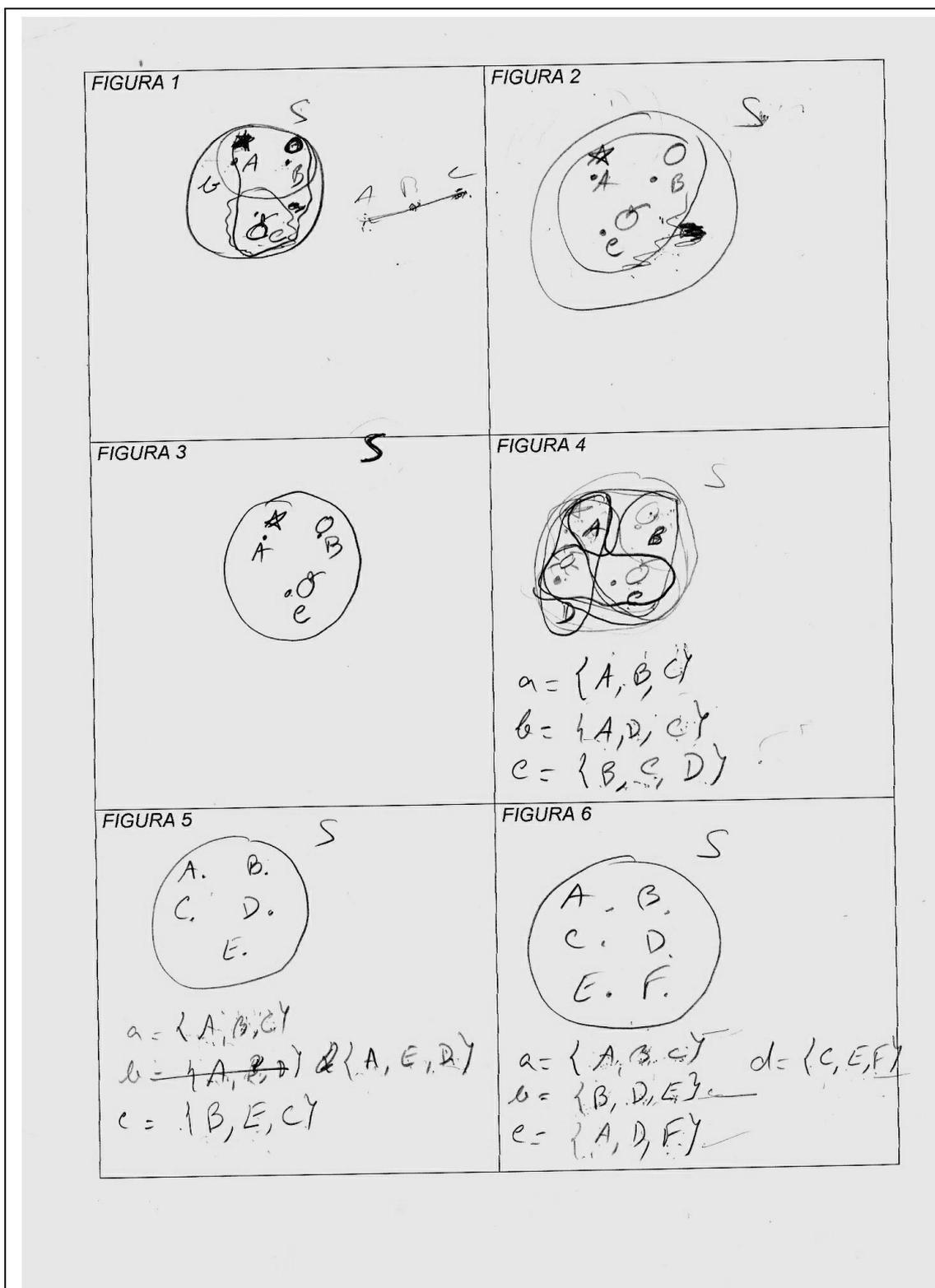
A cópia digitalizada ainda deve ser revisada e elaborada eletronicamente, a fim de que venha a apresentar todos os traçados realizados pelo sujeito e que constem das anotações do Relatório de Acompanhamento (ainda que alguns não apareçam na figura original, por terem sido apagados pelo entrevistado). Este é o caso, por exemplo, dos segmentos de reta do Registro 2, referentes à Figura 1, que se apresenta no Quadro 2.

Da cópia digitalizada limpa e elaborada de cada figura, cria-se um conjunto de registros relacionados às intervenções do diálogo, nos quais se apresentam os traçados

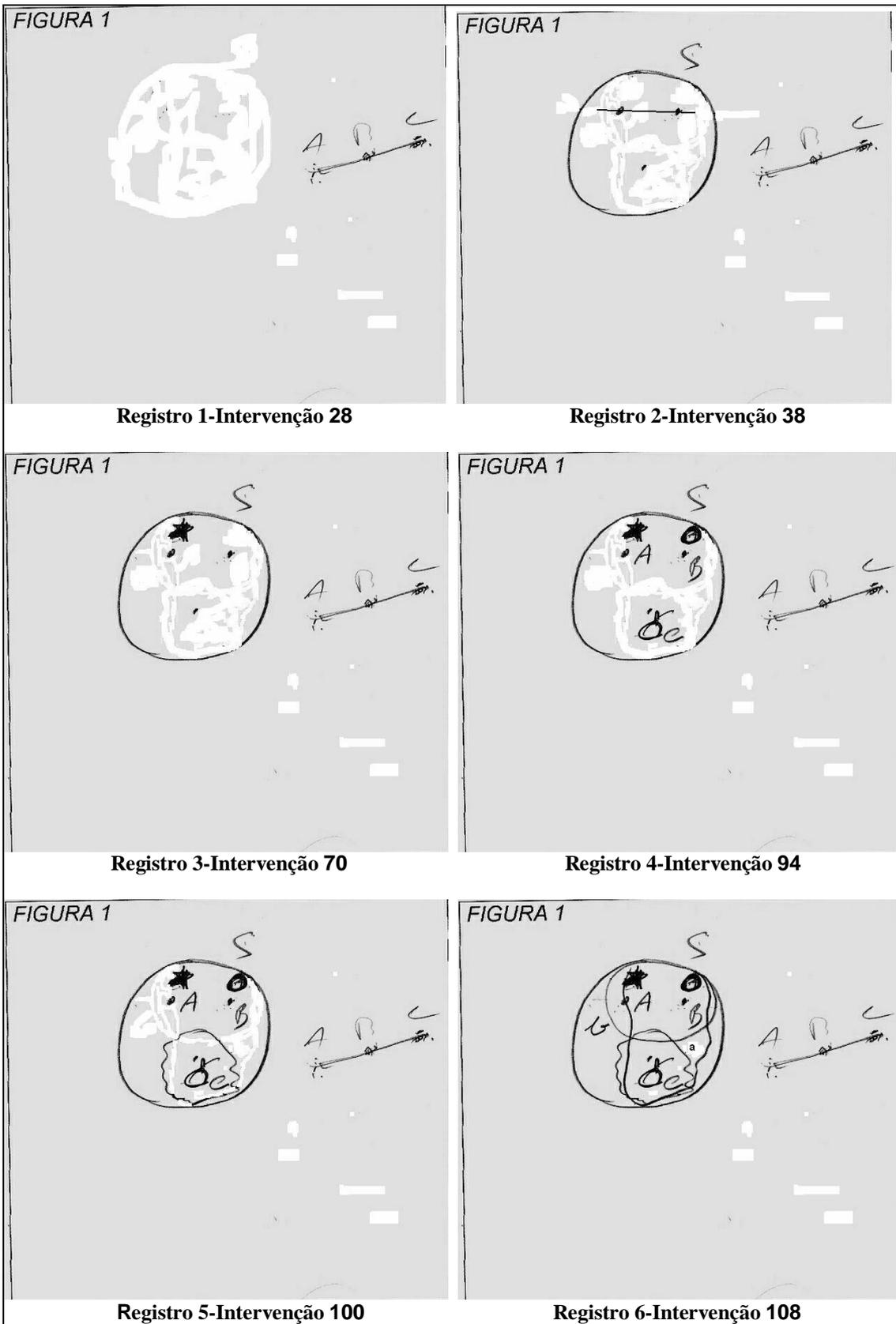
parciais correspondentes à figura original. No Quadro 2, apresenta-se este conjunto de registros relativamente à Figura 1 original de Maria. Por sua vez, como cada registro desse conjunto deve reproduzir todos os traços realizados pelo entrevistado em um determinado momento do diálogo, então, para a criação do registro correspondente a uma intervenção, devem ser também novamente consideradas as anotações do Relatório de Acompanhamento. Desta forma, para cada intervenção considerada no relatório, cria-se uma cópia digitalizada (previamente limpa e elaborada) da figura original da qual se apagam eletronicamente os traços que não constem do registro manual apresentado no relatório (observem-se as manchas claras presentes nos Registros da SHCRG, nos Quadros 2, 3 e 4). É este processo de desconstrução da figura original e de eliminação de traços que permite com que cada registro da SHCRG apresente apenas parte do traçado da figura. Bem como, é a subsequente compilação do conjunto dos registros eletrônicos correspondentes a uma figura original, que permite a criação da seqüência na qual o entrevistado a elaborou. A coleção de todos os conjuntos de registros, criados eletronicamente para cada uma das figuras originais, forma a SHCRG. Resumidamente, pode-se dizer que a SHCRG corresponde à expansão da Seqüência Condensada de Registros Originais.

Cabe ainda salientar que, na medida do possível, deve-se buscar ter todos os quadros da SHCRG em um mesmo campo visual. Para tanto, uma redução das dimensões das cópias dos originais, mas que não prejudique a sua observação, pode se mostrar indicada. Ou ainda, no caso em que se utilizem diversas folhas para a apresentação da evolução dos registros da SHCRG, estas sejam colocadas seqüencialmente sobre uma mesma superfície plana (como no caso aqui apresentado). Estas recomendações devem-se às considerações de François Bresson sobre a funcionalidade das representações semióticas e quanto aos desenhos permitirem representar a totalidade das relações entre os elementos, que constituem um objeto ou uma situação (BRESSION, 1987, p. 940-943).

Sob estas considerações, para melhor acompanhamento deste texto, sugere-se ao leitor que copie as três folhas contendo os Quadros 2, 3 e 4, nas quais se encontra a evolução dos registros da SHCRG da entrevista com Maria.



QUADRO 1
 Seqüência Condensada de Registros Originais de Maria
 obtida por meio de um *scanner* de alta resolução



QUADRO 2

Seqüência Histórica de Construção dos Registros Gráficos - Parte 1
Evolução dos Registros Gráficos da Figura 1 da Seqüência Condensada de Registros Originais

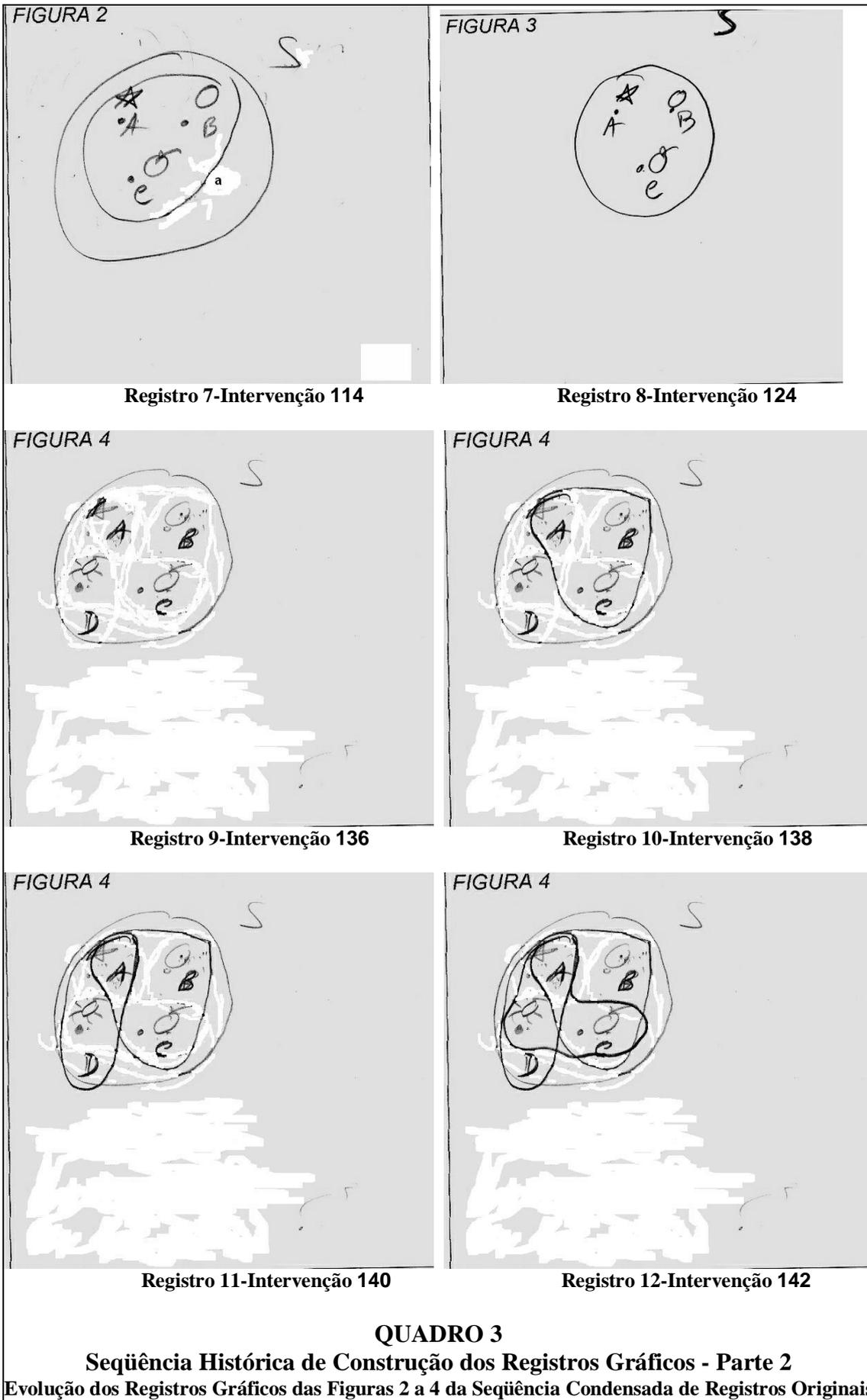
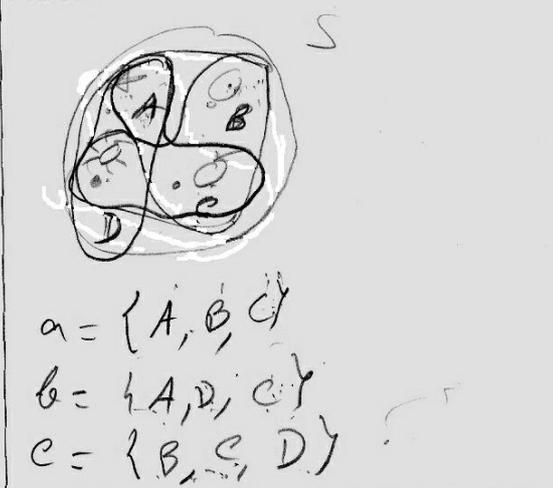


FIGURA 4



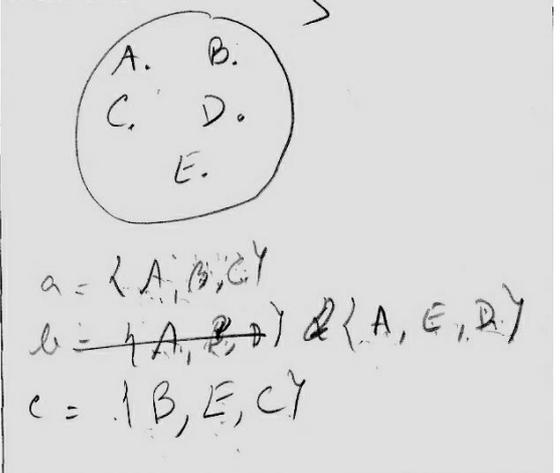
Registro 13-Intervenção 145

FIGURA 4



Registro 14-Intervenção 150

FIGURA 5



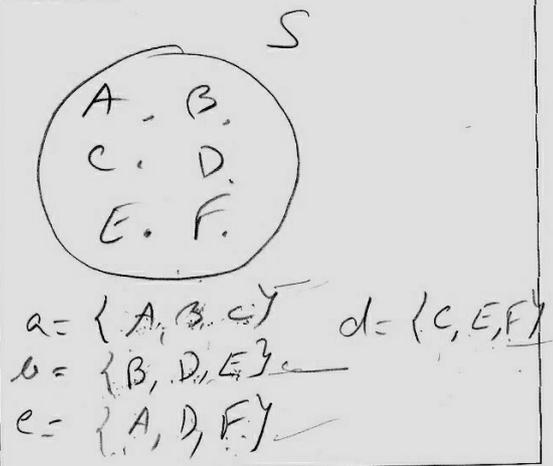
Registro 15-Intervenção 168

FIGURA 6



Registro 16-Intervenção 180

FIGURA 6



Registro 17-Intervenção 202

QUADRO 4

Seqüência Histórica de Construção dos Registros Gráficos - Parte 3
 Evolução dos Registros Gráficos das Figuras 4 (continuação) a 6 da Seqüência Condensada de Registros Originais

QUADRO 5 - O Problema-Objeto

Considere um jogo cujas regras são estabelecidas por um sistema de proposições afirmativas relativamente a um conjunto qualquer de elementos, isto é, considere um sistema de afirmações sobre um conjunto qualquer S com as características descritas a seguir.

S é um conjunto de elementos quaisquer chamados “pontos”.

Convencionou-se também chamar de “linhas” a subconjuntos contidos em S , mas que não coincidem com ele, que contenham exatamente três pontos.

Além disso, considere que neste jogo, existe uma relação entre os pontos e as linhas de S a qual satisfaz às seguintes afirmações.

A_1 : Existe pelo menos um ponto em S .

A_2 : Por cada ponto de S passam exatamente duas linhas.

A_3 : Por dois pontos distintos quaisquer de S passa, no máximo, uma linha.

Saiba que, em S , pontos diferentes e retas diferentes são sempre denotados por letras diferentes, sendo que os pontos são denotados por letras maiúsculas e as retas por minúsculas.

Qual é o número mínimo de pontos de S que admite uma solução para o jogo?

Observe-se que o problema se apresenta na forma de três regras explícitas, A_1 , A_2 e A_3 , e de três convenções implícitas, as quais podem ser apresentadas na seguinte forma:

C_1 : S é um conjunto de elementos quaisquer chamados “pontos”;

C_2 : “linhas” são subconjuntos contidos em S , que não coincidem com ele, que contém exatamente três pontos.

C_3 : pontos diferentes e linhas diferentes de S são denotados por letras diferentes, sendo que os pontos são denotados por letras maiúsculas e as retas por minúsculas.

O enunciado refere-se a *elementos quaisquer*, denominados *pontos* e a *subconjuntos de três pontos*, denominados *linhas*. As regras e convenções estabelecem uma *relação de pertinência* entre os elementos e os subconjuntos de S , a qual é explicitada pelo verbo *passar* e não estabelece nenhuma interpretação *a priori*, relacionada à métrica, ao comprimento e à proximidade. As implicações possíveis são as estabelecidas pela relação de pertinência entre elementos e conjuntos. Como decorrência destas considerações, tomando-se as expressões *ponto de S* e *linha de S* como unidades semânticas constitutivas das proposições do enunciado, tem-se que tais expressões podem ser associadas a unidades elementares de significado, o qual, no entanto, não é pré-determinado ao enunciado e nem deve ser fixado.

QUADRO 6 - Uma Resolução do Problema-Objeto

Das afirmações que caracterizam o problema, tem-se que o conjunto S não pode ser vazio, pois da afirmação A_1 decorre que:

- a) em S existe ao menos um elemento. Designe-se este elemento com a letra maiúscula A . Para efeito de representação em outro registro adequados ao enunciado, vide, a seguir, representações na linguagem da Teoria dos Conjuntos.

Tomando-se como premissa a proposição A_2 , pode-se afirmar que deverão existir ao menos dois subconjuntos de S aos quais o elemento A pertença. Estes, devido à consideração de que cada linha (e, portanto subconjunto) de S possui três pontos (elementos), para completar, deverão ter mais dois elementos cada, sendo o elemento A comum a ambos.

- b) Sejam B e C as designações dos elementos adicionais de um destes subconjuntos, o qual passará a ser formado pelos elementos A , B e C e designado por r . Sejam ainda D e E os elementos adicionais do outro subconjunto, o qual passará a ser formado por A , D e E e designado por s .

Portanto, observa-se que S deverá possuir ao menos 5 elementos, os quais, no entanto, não configuram a solução do problema, pois cada um dos elementos B , C , D e E pertence a apenas um subconjunto, deixando, portanto, de satisfazer a afirmação A_2 .

A busca da solução deverá ser empreendida por meio da adoção da hipótese da existência de uma solução contendo elementos e subconjuntos adicionais para S , para os quais as regras e as convenções deverão ser verificadas. È que se apresenta a seguir.

- c) Dado que se busca o número mínimo de elementos de S , suponha-se que exista apenas mais um elemento (o sexto) em S . Seja F a designação escolhida para este elemento.
- d) Não havendo preferência em relação aos pares de elementos mencionados, considere-se um subconjunto adicional, t , formado por B , D , F . Notando-se ainda que apenas três elementos de S (C , E e F) ainda não foram incluídos em um segundo subconjunto, pode-se criar um subconjunto adicional u que contenha estes três elementos. Neste ponto é necessário verificar se a afirmação A_3 foi satisfeita. Observe-se que, qualquer par de elementos a ser considerado, pertencerá a não mais do que um subconjunto de S . Tem-se, desta forma, que os seis elementos A , B , C , D , E e F , acomodados nos quatro subconjuntos r , s , t e u , são uma solução para o problema. Além disso, esta solução utiliza o menor número de elementos, para que S seja um jogo com as características consideradas. Como decorrência, o número mínimo de elementos de S , conforme solicitado na proposta do problema, é **seis**.

Evolução do procedimento de resolução apresentada na linguagem discursiva apropriada à Teoria dos Conjuntos

A	$r = \{A,B,C\}$	$r = \{A,B,C\}$	$r = \{A,B,C\}$	$r = \{A,B,C\}$
		$s = \{A,D,E\}$	$s = \{A,D,E\}$	$s = \{A,D,E\}$
			$t = \{B,D,F\}$	$t = \{B,D,F\}$
				$u = \{C,E,F\}$
a)	b)	c)	d)	e)

5. CAPTURANDO SISTEMAS E CONVERSÕES DE REGISTROS EM UMA SEQUÊNCIA HISTÓRICA DE CONSTRUÇÃO DOS REGISTROS GRÁFICOS

Observando-se a SHCRG criada a partir da entrevista com Maria, constata-se uma grande variedade de registros semióticos relacionados às expressões *ponto de S* e *linha de S*, apresentadas na linguagem natural no enunciado do problema. Como se verá a seguir, é esta diversidade de registros que potencializa uma fecunda análise, no que se refere às representações semióticas dessas expressões, a qual permite a captura tanto dos sistemas de registros utilizados por Maria, como das conversões entre dois registros destes sistemas. São essas conversões que possibilitam se perceber como a entrevistada entende o significado matemático das duas expressões no procedimento de resolução do problema.

5.1 A CAPTURA DOS SISTEMAS DE REGISTROS

A simples observação visual da SHCRG de Maria permite perceber o aparecimento de quatro tipos distintos de formas de se registrar as representações das expressões *ponto de S* e *linha de S*. No primeiro registro da SHCRG, correspondente à Intervenção 28, os traços para *ponto de S* e *linha de S* apresentam-se nas representações semióticas clássicas para *ponto euclidiano* e *reta euclidiana*, conforme instituídas por George Birkhoff e Ralph Beatley, em 1959 (KALEFF, 2004). Esta forma não-discursiva de se registrar dados pode ser referida como sendo pertencente a um **Sistema de Registros não-Discursivos Euclidiano** ou, brevemente, como um **Registro Euclidiano**.

No segundo registro da SHCRG, correspondente à Intervenção 38, um *ponto de S* e uma *linha de S*, também com traçados euclidianos, são apresentados no interior de uma curva fechada, como se representados em um diagrama de Venn. Esta forma gráfica híbrida, não convencional e não-discursiva pode ser referida como sendo pertencente a um **Sistema de Registros não-Discursivos Euclidiano com Diagrama de Venn** ou, brevemente, como um **Registro Euclidiano-Diagrama de Venn**.

A partir do terceiro registro referente à Figura 1 (Intervenção 70) até o da Figura 3 (Intervenção 124), são apresentados registros icônicos, por meio de desenhos (uma estrela, uma laranja e um sol) para diferentes elementos de S, colocados no interior de diagramas de Venn.

As representações realizadas com o uso de diagramas de Venn, nas quais ficam subentendidas as relações de pertinência entre elementos dos conjuntos e suas

operações, podem ser consideradas expressadas na forma de um registro pertencente ao sistema de registros gráficos não-discursivos e típico da Teoria dos Conjuntos, o qual será aqui referido como *Sistema de Registros por meio de Diagramas de Venn*, ou seja, o registro será designado como *Registro de Diagramas de Venn*.

No Registro 14, referente à Figura 4 (Intervenção 150), nota-se o aparecimento de um registro simbólico típico da Teoria dos Conjuntos, apresentado na linguagem discursiva apropriada aos conjuntos e criada por Georg Cantor, na segunda metade do século XIX. Nesta linguagem, os *pontos de S* são notados por letras maiúsculas e as *linhas de S*, como conjuntos. Esta forma de sistema simbólico de registros discursivos será referida como *Linguagem da Teoria dos Conjuntos* e cada um de seus registros por *Registro da Teoria dos Conjuntos*.

Como se apresenta a seguir, é esta gama de sistemas de registros semióticos apresentada por Maria e capturada por meio da observação da SHCRG, que viabiliza a captura das conversões entre dois registros destes sistemas, o conseqüente entendimento de como a entrevistada interpreta as expressões do enunciado do problema-objeto e, que permite ainda se observar a importância dos diferentes registros para o desenvolvimento da sua resolução.

5.2 A CAPTURA DAS CONVERSÕES ENTRE REGISTROS E O ENTENDIMENTO DOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Uma breve visada da SHCRG mostra que duas das figuras originais (Figura 1 e 4) se apresentam expandidas em uma quantidade maior de registros, apontando que os traçados referentes a estas figuras devem ser de grande importância para o desenvolvimento da resolução do problema.

Observando-se o Registro 1, referente à Figura 1, verifica-se que é constituído por um segmento de reta e por três pontos. No segundo quadro, o Registro 2, o traçado aponta para um conflito entre as formas dos traços desenhados por Maria, pois este registro, aparentemente revela uma ambigüidade relativamente à apreensão visual das formas de *ponto de S* e *linha de S*. Nele se apresentam desenhados dois tipos diferentes de traçados gráficos, um como registro euclidiano e outro como diagrama de Venn. Este conflito pode ser constatado levando-se em consideração os aspectos teóricos de uma conversão de registros semióticos, os quais, segundo Duval, tanto se apresentam ligados

à espontaneidade de uma congruência de registros, quanto ligados à natureza dos objetos matemáticos representados.

Desta forma, considerando-se as expressões *ponto de S* e *linha de S*, nas convenções C_1 e C_2 , pode-se afirmar que, no Registro 2, Maria aparentemente lhes atribui dois diferentes significados. Ou seja, apresenta para cada uma dessas expressões duas unidades de significado, expressas por meio de dois diferentes registros gráficos que não apresentam correspondência semântica, ainda que, no caso do *ponto*, o *ponto euclidiano* e o *ponto de S* (no diagrama) possam apresentar as mesmas possibilidades de apreensão visual. No entanto, no caso da *linha de S*, esta se apresenta sob duas possibilidades de ordem de apreensão: como reta euclidiana e como diagrama de Venn.

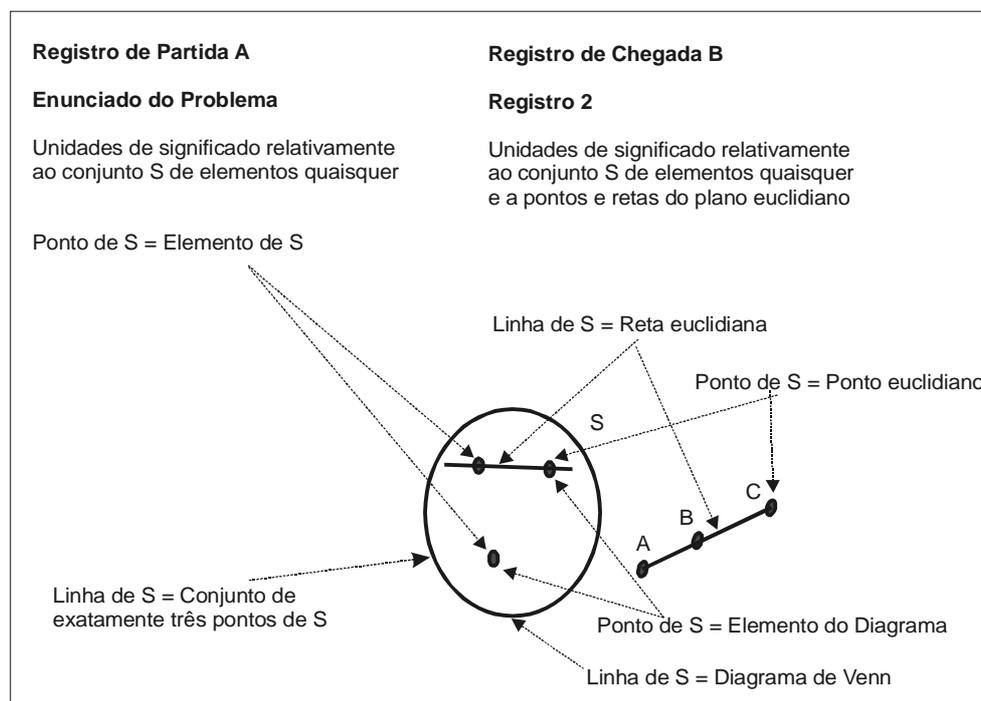
No Quadro 7, esta ambigüidade de significados relativamente às convenções fica evidenciada em uma conversão de registros não-congruentes: entre o registro de partida (indicado como Registro Semiótico A, correspondente ao enunciado do problema) e o registro de chegada criado pela entrevistada (indicado como Registro Semiótico B, correspondente ao Registro 2 da SHCRG).

QUADRO. 7 Apresentação da Não-Congruência na Conversão de Registros

Unidades Elementares	Registro Semiótico de Chegada (B) expressado em registro não-discursivo (Registro 2)		
Registro Semiótico de Partida (A) (Linguagem Natural - Enunciado do problema)	<i>Correspondência semântica das unidades de significado</i>	<i>Possibilidades iguais de ordem de apreensão visual</i>	<i>Unicidade semântica no registro de chegada</i>
“Ponto” de S (Elemento de um conjunto qualquer)	Não 1. (Ponto euclidiano) 2. (Ponto de S)	Sim (Ponto qualquer como Ponto euclidiano)	Não 1. (Ponto euclidiano) 2. (Elemento no Diagrama de Venn)
“Linha” de S (Conjunto de exatamente três pontos)	Não 1. (Reta euclidiana) 2. (Conjunto de três elementos)	Não 1. (Reta euclidiana) 2. (Diagrama de Venn)	Não 1. (Retas euclidiana) 2. (Diagrama de Venn)

Esses fatos ficam mais ilustrados no esquema apresentado no Quadro 8.

QUADRO 8 – Esquema das Unidades Elementares de Significado Envolvidas na Conversão de Registros



Para a orientação do leitor, e somente à guisa de confirmação das observações anteriores, apresenta-se o diálogo inicial da entrevista, no qual se observa uma preocupação intempestiva de Maria exclusivamente com as convenções, não considerando as demais regras do enunciado (Intervenções 25 a 48).

25. E: Será que daria para se construir um exemplo de S, de um conjunto no qual só se tivesse um número mínimo de pontos?

26. Maria: Três pontos? No caso seria com apenas três pontos. [Desenha o Registro 1]

27. E: Três pontos?

28. Maria: Três pontos. Cada linha é exatamente três pontos. Então, esse desenho já não serve. [Desenha Registro 2]

29. E: Por quê?

30. Maria: Porque eu vou ter três pontos em uma linha. Cada linha, a não ser que eu não tenha linha.

31. E: Como é ?

32. Maria: Em cada linha há exatamente três pontos. Então, no caso com esses três pontos de S, eu não posso ter uma linha. Porque eu não vou ter exatamente três pontos. [Aponta os pontos no Registro 2]

33. E: Você não vai ter uma linha? Como é isso? Explique, por favor.

34. Maria: Por exemplo, se eu colocar uma linha, eu tenho dois pontos. Aqui diz que em cada linha há exatamente três pontos e eu tenho menos.

35. E: Você tem menos? Em cada linha?

36. Maria: Eu digo assim: por pontos de S , eu estou considerando esse ponto aqui A , esse ponto B , esse ponto C . Então, se eu fizer uma linha eu não teria três pontos de S .
- 37. E: Se você fizesse uma linha? O quê seria uma linha nesse seu conjunto?**
38. Maria: Se for uma reta eu vou ter infinitos pontos. Mais de três.
- 39. E: O que você quer dizer?**
40. Maria: Eu raciocinei linha à reta.
- 41. E: À reta?**
42. Maria: Pois é, mas não pode, um segmento de reta. Não pode ser.
- 43. E: Ah! Você racionou linha como um segmento de reta?**
44. Maria: É. Mas, aí, no caso, seriam infinitos pontos.
- 45. E: Ah! Você teria infinitos pontos, é isso que eu entendi? E, não pode ser?**
46. Maria: Porque pediu exatamente três pontos, então, pensando linha como segmento de reta, eu não vou ter.

Como se pode constatar, a *infinidade de pontos*, caracterizada pela densidade da reta euclidiana, bem como a *colinearidade dos pontos* ambas evidenciadas no Registro 1, surgiram como fatores de desequilíbrio frente à convenção C_2 expressada como: *linha de S com exatamente três pontos*. Estes fatos ficam aparentes na Intervenção 32, ao Maria abandonar a reflexão sobre o diagrama de Venn e voltar a sua atenção para o segmento traçado. Aqui, constata-se o surgimento de uma tensão entre *existência de pontos em S e pontos conhecidos*, a qual se manifesta no reconhecimento, pela entrevistada, do seu não entendimento do que deve ser considerado como uma *linha de S* na solução do problema, como se pode confirmar no trecho do diálogo que se segue (Intervenções 52 a 64).

- 52.** Maria: Eu não vou poder fazer isso, desenhar uma linha usando três pontos dentro de S , porque se eu pensar em linha como um segmento, eu vou ter mais de três pontos, eu vou ter uma infinidade de pontos.
- 53. E: Sei. E como é que você poderia então representar?**
- 54.** Maria: Bom. A palavra “exatamente”. Eu acho que fugiria, com “exatamente”. Quando eu falo “exatamente”, eu estou falando em uma coisa finita, e eu sei que o segmento não tem como se fazer finito. Eu tenho uma infinidade de pontos. Eu não teria como. [Faz com a mão um gesto indicando como se um segmento horizontal colinear continuasse indefinidamente]
- 55. E: Se você tivesse segmentos de reta?**
- 56.** Maria: Eu não posso ter “exatamente” tantos pontos. Eu tenho três pontos conhecidos de S . Exatamente três pontos conhecidos de S .
- 57. E: Sei. Então, como você poderia representar três pontos?**
- 58.** Maria: Não, eu colocaria co-lineares. Eu colocaria co-lineares agora porque aí eu poderia pelo menos dizer que três pontos eu conheço do segmento [Indica o segmento do Registro 2].
- 59. E: Que segmento?**
- 60.** Maria: O segmento que eu vou dizer que é uma linha.

61. E: Eu não consigo perceber ainda a diferença que você está fazendo entre linha e segmento.

62. Maria: Eu acho que nem eu.

Desta forma, fica evidente o conflito de significados observado anteriormente e vem patentear as considerações advindas da observação dos registros da SHCRG.

No que se segue, apresentam-se os recursos desenvolvidos pela entrevistada para ultrapassar este conflito de significados e o respectivo entrelaçamento com as conversões de registros realizadas no restante da entrevista.

A partir do Registro 3 (Intervenção 70), Maria aparentemente não considera mais *linha de S* com o significado euclidiano, o que fica ressaltado nas apresentações gráficas icônicas, por meio de Diagramas de Venn, para *ponto de S* e *linha de S* (Registros 3 a 6) e se confirma no diálogo e nas suas considerações.

Pode-se afirmar que para a efetivação do Registro 3, Maria realiza uma conversão entre o registro na linguagem natural e outro expressado por meio de diagramas de Venn, a qual é parcialmente congruente à C_2 . No entanto, esta conversão, apesar de também não ser congruente às regras do enunciado, é muito importante neste processo de resolução. Tal conversão estabelece uma correspondência semântica entre as unidades de significado consideradas, apresentando também uma unicidade semântica no registro de chegada, a qual estabelece a natureza das unidades elementares consideradas no âmbito do enunciado do problema: como *elementos* e *conjuntos abstratos*. A *linha de S* passa a ser considerada como um subconjunto com três elementos. Tal evento se configura como uma segunda ruptura com as concepções euclidianas previamente admitidas pela entrevistada. No Quadro 9, indicam-se as relações envolvidas nesta última conversão de registros.

QUADRO 9 Apresentação da Congruência na Conversão de Registros

Unidades Elementares	Registro Semiótico de Chegada (B) expressado por meio de diagramas de Venn (Registro 3)		
Registro Semiótico de Partida (A) (Linguagem Natural - Enunciado do problema)	<i>Correspondência semântica das unidades de significado</i>	<i>Possibilidades iguais de ordem de apreensão visual</i>	<i>Unicidade semântica no registro de chegada</i>
“Ponto” de S (Elemento de um conjunto qualquer)	Sim (Expressada de forma icônica em desenhos)	Sim	Sim (Elemento no interior do diagrama de Venn)
“Linha” de S (Conjunto de exatamente três pontos)	Sim (Conjunto de três ícones ou de três pontos desenhados no interior de uma curva fechada)	Sim	Sim (Diagrama de Venn)

Observando-se os Registros 6 a 8 da SHCRG, percebe-se que Maria se preocupa em traçar desenhos que verifiquem as afirmações do enunciado, por meio do traçado de curvas fechadas, identificando subconjuntos a partir dos elementos desenhados para S. Neste procedimento de verificação, em cada um dos registros, busca analisar somente a convenção C_2 . Nos Registros 7 e 8, correspondente às figuras originais 2 e 3, aparentemente Maria apresenta-se bloqueada pela certeza de que a *linha* de três pontos satisfaz ao número mínimo de pontos para S, o que a levaria a não ter considerado a convenção C_2 em toda a sua extensão no início da entrevista.

Nos Registros 9 a 14, relativos à Figura 4, a entrevistada passa a verificar a validade das regras do enunciado para 4 pontos. Por meio do traçado de curvas fechadas busca identificar os possíveis subconjuntos com três elementos, os quais poderiam transformar a figura em um registro congruente às regras e convenções para S. No Registro 11, traça, erroneamente e, portanto, de forma não congruente à regra A_3 , um diagrama com dois elementos, A e D, e refazendo esta composição, no Registro 12, completa o diagrama com o ponto C, tornando-o congruente com esta regra. No Registro 13, traça o diagrama que contorna D, C e B. Estes traçados tornam o registro não-congruente à regra A_3 .

A grande quantidade de traçados, nesta busca dos diagramas para representar os conjuntos, aponta a dificuldade de Maria para administrar as regras e convenções nesta forma de registro gráfico. As dificuldades aparentemente são impostas devido ao emaranhado visual decorrente do excesso de informações apresentadas nos traços dos

diagramas. Tudo indica, e como se confirmou no diálogo da entrevista, ser o emaranhado de traços que a leva a uma nova conversão de sistema de registro, que se apresenta no Registro 14.

Nesta última conversão, Maria passa do sistema de diagramas de Venn, para o da Teoria dos Conjuntos, o qual é parcialmente congruente à C_2 . A entrevistada aparenta reconhecer que todos os possíveis elementos pertencentes ao universo da solução têm as mesmas possibilidades de comportamento a partir das afirmações do enunciado e que, portanto, uma representação expressada na linguagem simbólica discursiva da Teoria dos Conjuntos é mais apropriada para representar os elementos de S .

A partir do Registro 15, nota-se que, apesar de desenhar diagramas de Venn com 5 e 6 pontos, Maria não recorre mais a esta modalidade de representação, passando a indicar os subconjuntos relativos às *linhas de S*, ao considerar cada letra grafada como se fosse um determinado elemento e observando os agrupamentos das diferentes letras em cada conjunto, segundo as regras determinadas pelo enunciado do problema. Pode-se, portanto, como indicado no Quadro 10, afirmar que a entrevistada realiza uma conversão congruente entre um registro da linguagem natural e um registro na linguagem simbólica da Teoria dos Conjuntos relativamente à convenção C_1 , parcialmente congruente à C_2 , a qual, no entanto, ainda não é congruente às regras de S .

No Registro 17, Maria apresenta uma solução com seis pontos para o problema-objeto, a qual foi obtida a partir da hipótese de se ter cinco pontos, como considerada no registro anterior e confirmada pelo diálogo. Este último registro é congruente a todas as regras e convenções.

QUADRO 10 Apresentação da Congruência na Conversão de Registros em relação às convenções C_1 e C_2

Unidades Elementares	Registro Semiótico de Chegada (B) Expressado na linguagem simbólica da Teoria de Conjuntos		
Registro Semiótico de Partida (A) (Enunciado do problema)	<i>Correspondência semântica das unidades de significado</i>	<i>Possibilidades iguais de ordem de apreensão visual</i>	<i>Unicidade semântica no registro de chegada</i>
“Ponto” de S (Elemento de um conjunto qualquer)	Sim (Elemento de S)	Sim	Sim (Elemento no interior do conjunto)
“Linha” de S (Conjunto com exatamente três pontos)	Sim (Conjunto de três pontos, indicado por três letras maiúsculas entre chaves)	Sim	Sim (Conjunto de três pontos)

Apesar da entrevistada não utilizar o registro do diagrama de Venn no desenvolvimento do último registro correspondente à resposta do problema-objeto, cabe, todavia, uma observação sobre o comportamento de Maria: embora não trace nenhuma linha no interior do diagrama de Venn, ela desenha o seu contorno, e , recorre à utilização de expressões do tipo “*vou pegar o D*”, “*terei de pegar ou o E, ou o F*”, indicando utilizar o recurso das letras como um suporte gráfico para o seu raciocínio, o qual, no entanto, realiza a partir de um processo de verificação das regras do enunciado do problema, construindo os 6 pontos de S.

É interessante se observar, como a entrevistada, mesmo após ter resolvido o problema, volta a dar ênfase ao estranhamento causado pela ocorrência do conflito inicial relativamente ao entendimento das expressões *ponto de S* e *linha de S*, objetos da análise. Maria afirma estranhar a forma pela qual ela própria associava a representação mental do termo *reta* com aquela para *linha*: “*Na primeira vez que eu li, na minha cabeça eu estava imaginando ponto e segmento. [...] Quando se fala em linha, você pensa, até que não seja uma reta, mas você pensa. Na minha cabeça, toda vez que eu penso em linha eu penso. [Aponta o segmento de reta no papel, ao lado do Registro 2]. Não tem jeito. Eu penso em reta.[...] eu estou achando engraçado como é que eu estava lendo, eu estava pensando em ponto e em segmento*”, reconhecendo ainda que necessita do recurso visual, como apoio ao desenvolvimento do seu raciocínio, pois expressa,

mesmo no caso em que trata os *pontos de S* por meio de letras, necessitar “*olhar o meu raciocínio, ler o meu raciocínio*”.

6. OBSERVAÇÕES FINAIS

Os comentários da professora Maria, sobre a forma como avalia o seu próprio comportamento durante a entrevista, apontam para uma realidade do sistema educacional na qual o sujeito não pode dispensar o recurso visual como apoio ao raciocínio, no desenvolvimento de atividades matemáticas. Esta realidade abrange até mesmo aqueles que se encontram em nível de formação continuada, que potencialmente dominam uma linguagem discursiva apropriada à Matemática e que, aparentemente, estão isentos da influência do recurso visual para o entendimento de uma atividade matemática.

O sinuoso caminho de elaboração gráfica percorrido por Maria, na busca da solução de um problema matemático tão singelo, indica que este se constituiu em um significativo desafio cognitivo, entremeado por percalços relacionados aos sistemas de registros semióticos considerados. Esta constatação, por sua vez, aponta para a necessidade dos educadores se voltarem, cada vez mais, para a busca do entendimento das interações cognitivas advindas dos diversos recursos semióticos no desenvolvimento do raciocínio matemático. O desvelamento dessas interações justifica, portanto, a elaboração de um instrumento de pesquisa na direção de se capturar registros semióticos e de se buscar tanto as inter-relações entre tais registros como as suas implicações para a realização de atividades matemáticas.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENJAMIN, Walter (1985) *Magia e Técnica, Arte e Política*. Trad: Rouanet, Sérgio. 7ª ed. São Paulo: Brasiliense.

BRESSON, François (1987) *Les Fonctions de Représentation et de Communication*. In Piaget, J.; Mounod, M.; Bronckart, J. (Eds), *Psychologie*. Paris: Encyclopédie de la Pleiade. 933-982.

DUVAL, Raymond (1995) *Semiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques Et Apprentissages Intellectuels*. Berna: Peter Lang.

----- (2003) *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Alcântara Machado, Silvia D. (Ed.) *Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica*. São Paulo: Papirus. 11-34.

KALEFF, Ana Maria M. R. (2004) *Da Rigidez do Olhar Euclidiano às (Im)Possibilidades de (Trans)Formação dos Conhecimentos Geométricos do Professor de Matemática*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação-UFF. Niterói. 450 p.

MEIRA, Luciano (1994) *Análise Micro-Genética e Videografia: Ferramentas de Pesquisa em Psicologia Cognitiva*. *Temas em Psicologia*. 3. 59-71.