

INVESTIGAÇÕES NA SALA DE AULA DE CÁLCULO¹

FROTA, Maria Clara R. - PUCMinas
mclarafrota@pucminas.br
GT 19 – Educação Matemática
Agência financiadora: CNPq

Introdução

O presente trabalho relata uma pesquisa desenvolvida com estudantes de Engenharia, como parte de uma proposta de trabalho de um curso de Cálculo, que tem como meta envolver os estudantes no fazer e explicar matemática. A estratégia de ensino-aprendizagem fundamentada no uso de tarefas investigativas é analisada com vistas a estudar suas potencialidades e limitações.

Nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) e nos Simpósios Internacionais de Pesquisa (SIPEM), realizados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, o Ensino de Cálculo tem sido a temática dominante no grupo de Educação Matemática no Ensino Superior (NASSER, 2004). Em particular, no GT de Educação Matemática da ANPEd, trabalhos relacionados ao Ensino de Cálculo têm sido regularmente apresentados². Um debate permanente, no interior das conferências do International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) e do International Congress on Mathematics Education (ICME), tem suscitado pesquisas no sentido de repensar a sala de aula de Cálculo, desde o seu desenho – sala usual ou sala ambiente, passando pelos próprios conteúdos veiculados e pelos recursos e materiais instrucionais.

A pesquisa aqui relatada destaca questões, relativas à motivação dos alunos, à autonomia e o autocontrole do processo aprendizagem, que podem estar correlacionadas à implementação de uma pedagogia da investigação no ensino de matemática (ERNEST, 1996). Os resultados apontam o papel relevante das tarefas investigativas para o repensar da sala de aula de Cálculo.

Na primeira parte discute-se a sala de aula enquanto espaço de ensino, aprendizagem e pesquisa, objetivando acrescentar novos elementos ao debate acerca da

¹ Grupo de Pesquisa– PINEM – Práticas Investigativas em Ensino de Matemática – PUC Minas.

² Ver o portal da ANPEd, reuniões 23 a 28.

“investigação sobre a própria prática” (PONTE, 2002), assunto ainda polêmico, mas na pauta do dia se consideramos, por exemplo, os programas de formação inicial e continuada de professores, e mais recentemente os mestrados profissionais em ensino.

A adoção de tarefas investigativas, suas possibilidades e dificuldades no âmbito do ensino de matemática, em especial do Cálculo são discutidas primeiramente de um ponto de vista teórico, objetivando-se uma análise a partir de uma dupla perspectiva: do aluno e do professor. A seguir busca-se captar as potencialidades e entraves desse tipo de tarefas, acompanhando aulas onde alunos de engenharia realizam investigações em Cálculo.

A sala de aula de Cálculo

A sala de aula de Cálculo tem sido afetada por fatores decorrentes, em parte, de um ensino universitário de massa: excessivo número de alunos, grande parte deles desmotivada, ou apresentando lacunas na formação matemática básica.

Parâmetros e diretrizes curriculares³ recomendam a adoção de estratégias de ensino e aprendizagem que objetivem despertar uma postura de investigação; não se trata mais de receber uma matemática pronta, mas de fazer matemática e mais ainda explicar a matemática feita, comunicar as idéias matemáticas.

Como penetrar a sala de aula, em particular a sala de aula de Cálculo, rompendo com uma certa inércia dominante que a torna improdutiva, tanto para o professor, quanto para o aluno? A resposta a essa questão demanda um movimento por parte de professores e alunos, no sentido de criação de um novo ambiente de aprendizagem em sala, o que representa uma alteração substancial dos papéis do professor e do aluno.

Do professor passa-se a demandar uma postura de professor-investigador: aquele que realiza investigações, aqui entendidas num sentido mais amplo, não apenas investigações sobre a própria prática, mas sobre questões diversas, correlacionadas ou não com essa prática.⁴ Esse entendimento sobre o professor-investigador apresenta a vantagem de acolher uma concepção da docência em matemática fundamentada no fazer matemática

³ Ver as Diretrizes Curriculares dos Cursos de Matemática (Brasil); os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, Brasil); os standards do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, USA); as recomendações da Associação dos Professores de Matemática (APM, Portugal);

⁴ Para discussão mais detalhada sobre o assunto, consultar, por exemplo, PONTE (2002), referência ao final.

do matemático⁵ e concretizada no fazer matemática com os alunos. Esse entendimento tende a eliminar a cisão professor e pesquisador, na medida em que fazer matemática seria o que move um e outro, variando-se o foco, as questões e instrumentos de pesquisa.

Partindo desse pressuposto, constata-se a necessidade de uma matriz mais adequada para se proceder a uma classificação da pesquisa decorrente dessa atuação do professor-pesquisador. A meu ver essa matriz é apresentada por Klahr e Li (2005), que se fundamentam em uma categorização proposta por Stokes (1997) de três diferentes formas de pesquisa. Segundo Stokes (Tabela 1) dois fatores distintos motivam e caracterizam a pesquisa científica: 1) a medida pretendida com a pesquisa, com vistas a avanços no entendimento do problema fundamental; 2) a medida da aplicabilidade imediata e utilidade dos resultados da pesquisa.

Tabela 1 – Tipos de pesquisa científica⁶

		Consideração sobre o uso?	
		Não	Sim
Busca por entendimento fundamental?	Sim	Pesquisa básica pura (Quadrante de Bohr⁷)	Pesquisa básica inspirada no uso (Quadrante de Pasteur)
	Não	Não aplicável	Pesquisa aplicada pura (Quadrante de Edison)

A classificação de Stokes apresenta-se como um argumento em oposição à visão clássica de relação entre a pesquisa básica e a pesquisa aplicada, que sempre coloca a pesquisa básica numa primeira posição (Quadrante de Bohr) e aponta como incompatíveis as duas metas de pesquisa: avanço do entendimento acerca de uma questão fundamental e usabilidade. Pasteur é usado por Stokes como contra-exemplo a essas duas visões ultrapassadas, uma vez que realmente não apenas fez avançar, mas criou a ciência da

⁵ Alguns professores universitários desenvolvem um duplo papel: por um lado desenvolvem pesquisa em matemática e por outro lado, ministram aulas em cursos de graduação. A dicotomia em que tais papéis são exercidos costuma por vezes ser nefasta à sala de aula.

⁶ Extraído de Stokes, 1997, citado em Klahr e Li (2005).

⁷ Klahr e Li (2005) inserem no primeiro quadrante uma outra matriz que classifica a pesquisa básica pura, segundo o tipo de conhecimento (1-domínio específico; 2) domínio geral) e as fases do processo de descobrimento (1- geração de hipótese; 2 - desenho experimental; 3 – evidência . Com essa nova matriz os autores buscam capturar as maneiras com que os psicólogos lidam com a complexidade real do processo da descoberta científica de forma a torná-la palpável, ou seja, traduzi-la em variáveis de pesquisa.

microbiologia, quando trabalhava em problemas práticos de aplicação imediata. O quadrante de Edison é o quadrante da pesquisa aplicada pura, onde se insere o trabalho do professor, que indaga o que funciona na sala de aula, numa abordagem que se assemelha mais ao trabalho do engenheiro, do que ao do cientista (KLAHR E LI, 2005).

Onde se insere a pesquisa em educação matemática e de modo particular a pesquisa sobre a própria prática? A rigor, a pesquisa em educação matemática pode situar-se em qualquer dos quadrantes, dependendo das questões que levanta, dos objetivos pretendidos e das variáveis em análise. A meta intrínseca de alguma aplicabilidade para o ensino e aprendizagem, parece, todavia, situar a pesquisa em educação matemática no quadrante de Pasteur, ou pelo menos no de Edison. Na interface dos dois quadrantes, situa-se, talvez, a pesquisa sobre a própria prática. Da mesma forma que uma visão clássica elege Bohr, como o protótipo da pesquisa básica pura, uma visão ultrapassada pode considerar que a pesquisa sobre a própria prática não oferece um maior entendimento sobre determinada questão, limitando-se a indagar acerca, por exemplo, da aplicabilidade de determinado recurso computacional para o entendimento do conceito de derivada de uma função, ou da integral definida, situando-se quando muito no quadrante de Edison. Essa mesma visão tende a manter a dicotomia entre pesquisador e professor, como se na sala de aula, na prática não se pudesse gerar conhecimento. O assunto é polêmico e tem demandado esforços de minha parte no sentido de um maior aprofundamento. Mas uma coisa é certa: a pesquisa sobre a própria prática precisa ficar mais robusta, através da melhor explicitação de seus problemas e da melhoria da qualidade dos instrumentos metodológicos de coleta e tratamento de dados. Entretanto, a pesquisa sobre a própria prática não pode se fortalecer ignorando a ética de ser uma pesquisa desenvolvida na sala de aula, envolvendo pessoas num processo de aprendizagem e não um experimento laboratorial, no qual é possível isolar e controlar variáveis.

Independentemente de uma categorização da pesquisa, convém ainda ressaltar que matemáticos ou professores, não necessariamente fazem pesquisa, podendo predominar a reprodução de matemática quer na pesquisa, quer na aula de matemática, ou seja, alguns resultados da pesquisa em matemática fogem aos critérios de novidade, da mesma forma que não podem ser consideradas como pesquisas em ensino, quaisquer atividades desenvolvidas em sala de aula.

PONTE (2002, p.5) destaca que “...o ensino é mais do que uma atividade rotineira onde se aplicam simplesmente metodologias pré-determinadas”. E é nesse ponto que podem ganhar força o professor prático reflexivo a que se refere Schön (2000) e a pesquisa sobre a própria prática. O professor-pesquisador conhece na ação, reflete na ação e a partir da ação, desenvolvendo um sistema integrado de informações internalizadas sobre o conteúdo, o aluno e a pedagogia (ARTZT; ARMOUR-THOMAS, 1998). Esse repertório de informações é continuamente realimentado, no processo dinâmico de interação com o aluno.

Professor e aluno se aventuram em fazer matemática na sala de aula e nesse processo um novo conhecimento coletivo pode ser produzido. Esse conhecimento gerado na comunidade de aprendizagem da sala de aula pode ser fortalecido de forma a ganhar o status de conhecimento não apenas prático, mas gerador de teoria resposta a problemas da educação matemática.

Investigar na sala de aula: novas possibilidades

Se do professor se demanda uma nova postura de investigador, espera-se que de parte do aluno seja também incentivada essa postura, para o que seria natural que os alunos se envolvessem em tarefas investigativas.

Entretanto, não é o que usualmente ocorre. Talvez um dos grandes problemas do ensino de Cálculo tenha suas raízes no tipo de aula de matemática e no tipo de matemática que o aluno vivencia na escola básica e reverter esse quadro tem demandado esforços da pesquisa em educação matemática.

Na qualidade de professora-pesquisadora tenho desenvolvido uma proposta de ensino de Cálculo com alunos de Engenharia, com vistas ao desenvolvimento da autonomia e autocontrole do processo de aprendizagem. Atividades diversificadas são realizadas ao longo do curso: estudos dirigidos que objetivam a revisão de tópicos importantes estudados anteriormente, sendo desenvolvidos em duplas e socializados num segundo momento; atividades investigativas propostas como introdução a novos conteúdos, na forma de situações problema; atividades investigativas que remetem o aluno à leitura e discussão do texto matemático, acerca de um tópico ainda não introduzido na sala de aula; uma oficina de estudos extra-classe que funciona semanalmente, como um espaço onde os alunos se

agrupam em função de objetivos diferenciados, como a leitura do texto didático, a confecção de um resumo, a resolução de uma lista de exercícios, contando com a assistência do professor, que desempenha um papel apenas de sugerir uma leitura ou colocar uma nova questão, orientando o trabalho dos grupos.

As tarefas investigativas têm na proposta do curso um peso significativo considerando-se as suas potencialidades do ponto de vista do aluno e do professor.

Sob a ótica do aluno e da sua formação, as tarefas investigativas constituem-se como elementos para: a) motivar; b) incentivar a autonomia; c) desenvolver o autocontrole do processo aprendizagem; d) desenvolver a competência de fazer e explicar matemática. De modo geral essas potencialidades são destacadas na literatura (PONTE et al., 1998), mas pensadas a partir da sala de aula de Cálculo, ganham uma conotação própria, e demandam mais estudos e pesquisas.

Do ponto de vista do professor, a aula investigativa tem sido bastante detalhada, desde o seu planejamento, até a execução e avaliação (PONTE, 2003). Assim, a discussão conduzida perpassa mais as questões didático-pedagógicas de condução de uma aula investigativa. Como professora, vislumbro, um outro tipo de potencialidades das tarefas investigativas, enquanto um instrumento eficaz para conduzir a sala de aula de matemática, na medida em que viabilizam lidar com a diferença; as atividades podem ser elaboradas de modo a oferecer desafios diferenciados, que atendam à expectativa do aluno, independente do seu maior ou menor conhecimento matemático. Essa potencialidade como um elemento facilitador no manejo do trabalho em sala, pode estar presente em outras atividades que utilizem o trabalho em grupo, mas, de modo particular, a aula investigativa, pressupõe o trabalho em grupo e possibilita conduzir a sala nos moldes de uma multi-sala. A sala de aula passa a ser pensada como formada de pequenas salas, os grupos de alunos, que podem apresentar diferentes níveis de desempenho e/ou conhecimentos matemáticos, e gerida como uma multi-sala.⁸

Tarefas investigativas transformam-se assim em uma força que move alunos e professores com vistas ao objetivo comum de fazer e explicar matemática, podendo romper a inércia da sala de aula. Destaca-se a potencialidade das tarefas investigativas de retomar

⁸ O trabalho desenvolvido nessa multi-sala assemelha-se ao trabalho desenvolvido pela professora da escola rural, em cuja sala se trabalham conteúdos das diversas séries, com cada pequena sala, aí inserida na forma de um grupo.

em níveis mais significativos a explicação em matemática, com seu rigor conceitual, operacional e simbólico, sua riqueza enquanto instrumento de modelamento da realidade.

Enquanto projeto, proposta de ação, as tarefas investigativas estão presentes na escola. De modo particular no livro didático de Cálculo⁹, fazem-se cada vez mais presentes, incitando o desenvolvimento dos processos matemáticos de intuição, argumentação, demonstração e generalização entre vários outros.

A pesquisa aqui relatada indaga acerca da possibilidade de utilização de tarefas investigativas na sala de aula de Cálculo, como instrumentos de desenvolvimento de idéias matemáticas relativas ao conteúdo específico de integrais e dos processos de sistematização e registro escrito dessas idéias.

Metodologia

A pesquisa foi desenvolvida pela professora-pesquisadora com três turmas de uma disciplina de Cálculo, envolvendo um total de 135 estudantes de engenharia. O principal instrumento de coleta de dados foi uma Folha de Atividades, que os alunos resolveram em duplas. Para a coleta de dados do segundo momento de pesquisa, a socialização dos resultados, foi feita a gravação em áudio, não utilizada para efeitos da análise aqui desenvolvida, além dos protocolos de observação da pesquisadora, elaborados em seguida à realização da tarefa.

A Folha de Atividades consistiu de três questões envolvendo o conteúdo de integrais múltiplas, elaboradas: a primeira na forma de uma descoberta guiada, nos termos definidos por Ernest (1996); as outras duas, a partir de uma perspectiva mais investigativa, incitando a especulação e construção de sistematizações por parte dos alunos.

Os alunos haviam estudado o conteúdo de integrais duplas. O item a da primeira questão sugeria a realização de uma operação que facilmente pudesse ser executada, por analogia a procedimentos desenvolvidos pelos alunos ao lidarem com integrais duplas. Os itens b a d da primeira questão remetiam a estudos já feitos de integral dupla, podendo ser um instrumento balizador do nível de entendimento de uma matéria já trabalhada em sala, de utilidade para o aluno e para o professor. As questões 2 e 3 objetivavam indagar o uso

⁹ Ver, por exemplo, a seção de Problemas Quentes do livro de Cálculo de James Stewart (2000), ou os exercícios do Livro de Cálculo de George Thomas(2002), do tipo: escrevendo para aprender, resolvendo graficamente, modelando, entre outros.

ou não de um raciocínio por analogias, que levasse os estudantes a estenderem para a integral tripla, as idéias utilizadas para lidar com a integral dupla.

Quadro 1 – Folha de Atividades

<p>Leia com atenção e procure resolver as tarefas propostas, registrando todas as suas observações.</p>
<p>1) Seja $I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz dy dx$.</p> <p>a) Calcule primeiramente a integral em relação à variável z. b) A expressão obtida é uma integral dupla. Você é capaz de atribuir um significado a essa expressão. Justifique sua resposta. c) Qual a maneira mais simples de proceder para resolver a integral dupla obtida na letra b), sem usar a calculadora? Justifique sua resposta. d) Calcule o valor da integral da letra b).</p>
<p>2) Você aprendeu que a área de uma região plana D pode ser expressa por meio da integral dupla $A_D = \iint_D dA$. Se E for um sólido do \mathbb{R}^3, como seria possível expressar o seu volume usando integral tripla?</p>
<p>3) Você aprendeu que no plano, quando D é x-simples e também y-simples é possível expressar a área de D, por meio de uma única integral dupla $A_D = \iint_D dA$, de duas maneiras distintas, considerando-se $dA = dx dy$ ou $dA = dy dx$.</p> <p>Seja E o sólido limitado por $x+2y+3z=6$ e pelos três planos coordenados. Procure expressar o volume do sólido E, usando uma única integral tripla, do maior número de maneiras possíveis. Justifique sua resposta.</p>

A tarefa desenvolvida não foi valorizada em termos de atribuição de uma nota, procurando-se dessa forma retirar elementos de tensão, que pudessem comprometer o desenvolvimento da mesma: duplas querendo copiar o resultado umas das outras, reclamações relativas ao tempo destinado para a realização do trabalho, entre outras. A tarefa tinha múltiplos objetivos. Do ponto de vista didático, possibilitar ao professor e ao aluno um diagnóstico do nível de entendimento de tópicos já estudados (envolvendo integral dupla) e oferecer o desafio da investigação, através de situações que exigissem a extrapolação de um trabalho desenvolvido no plano, para o espaço tridimensional. Do ponto de vista da pesquisa, obter dados que possibilitassem investigar alunos de Cálculo fazendo investigações, indagando acerca dos processos matemáticos por eles utilizados, de

modo especial os processos de estabelecer analogias, argumentar e registrar por escrito os argumentos.

Para efeito dessa pesquisa os registros escritos dos alunos foram tratados tendo por base a classificação das atividades desenvolvidas segundo dois aspectos: execução e explicação. Quanto à execução, as atividades foram agrupadas em três níveis: 1) não realizada, ou inadequada – compreendendo os casos em que a atividade foi deixada em branco, ou inadequadamente resolvida; 2) incompleta – agrupando os casos em que a atividade foi executada parcialmente; 3) adequada – quando a atividade foi executada na sua totalidade. Quanto à explicação, as atividades foram também reunidas em três níveis: 1) inexistente ou inadequada – quando o desenvolvimento não foi detalhado ou a resposta não justificada; 2) incompleta – quando a questão foi parcialmente detalhada ou justificada; 3) detalhada – quando o desenvolvimento da questão ou as justificativas elaboradas evidenciaram um maior traquejo ou rigor matemático.

Quadro 2 – Exemplos de classificação dos registros das duplas de alunos

Atividade	Resposta da dupla	Classificação	
		Execução	Explicação
1b	Pode representar uma área	1 – inadequada	1- inexistente
	Pode representar o volume de um sólido	2- incompleta – faltou a descrição do sólido	2-incompleta – diferencial de volume não foi detalhado.
	Pode representar o volume do sólido de altura $z = 4 - (x^2 + y^2)$, cuja projeção no plano é a região da semi circunferência superior $x^2 + y^2 = 2$.	3 - adequada	3 - detalhada
1c	Utilizando coordenadas polares	3 - adequada	1- inexistente - não houve justificativa.
	Através de coordenadas polares, pois assim seus limites de integração ficam mais simples.	3 - adequada	2 – incompleta - explicação parcial.

Optou-se, assim, por uma categorização bem próxima à prática do professor, ao corrigir questões, com a novidade de uma sistematização para a análise a partir de dois parâmetros, que focalizam não apenas o fazer do aluno, mas o justificar. O Quadro 2 apresenta exemplos da classificação feita para algumas respostas às questões 1b e 1c, a partir

dos registros apresentados, podendo-se constatar que a metodologia de análise é de fácil aplicação, mesmo pelo professor-pesquisador iniciante.

Principais resultados

A tabela 2 apresenta o número de trabalhos classificados (correspondente ao número de duplas 67 e 01 trabalho individual) segundo os níveis de execução e explicação de cada uma das atividades.

Tabela 2 – Número de duplas por nível de execução e explicação da atividade

Atividade	Nível de execução			Nível de explicação		
	1	2	3	1	2	3
1a	5	7	56	10	26	32
1b	19	23	26	32	28	8
1c	19	5	44	47	13	8
1d	47	10	11	47	10	11
2	29	6	33	59	4	5
3	52	12	4	54	11	3
Total	172	63	173	250	92	66

Os resultados permitem constatar que a questão 1a foi a mais adequada do ponto de vista de execução e a mais bem explicada: 56 duplas apresentaram nível de execução 3, sendo que as explicações de 31 delas foram consideradas detalhadas e de outras 25 parcialmente adequadas. O resultado evidencia que os alunos respondem mais prontamente a comandos do tipo: “calcule”, “resolva”. A questão direcionava a ação do aluno, exigindo a execução de uma operação de integração em relação a uma variável, realizada de modo análogo ao que já havia sido feito quando do cálculo de integrais duplas. Embora do ponto de vista de execução a tarefa tenha sido classificada como adequada para 56 duplas, não necessariamente o nível de explicação é o mesmo. Um número significativo de duplas (26) apresentou falhas na explicação. Seis duplas de uma mesma turma apresentaram a

resposta $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} -2x^2 - 2y^2 + 4dydx$, evidenciando problemas de falta de rigor de linguagem matemática.

A questão 1c, embora respondida adequadamente, careceu de melhores justificativas por parte dos alunos, o mesmo acontecendo com a questão 2. Essa última, por não repetir a ordem de “justificar a resposta”, foi explicada parcialmente por apenas 11 duplas e de modo mais detalhado por 4 duplas. Provavelmente os alunos não consideraram necessária qualquer explicação, inferência bastante usual entre alunos, que não têm o hábito de resolver as questões matemáticas explicando passagens e resultados.

A tabela 2 permite ainda verificar que a questão 1d foi adequadamente executada e detalhada por 11 duplas, enquanto 47 duplas não executaram a tarefa, ou a execução foi inadequada, e da mesma forma não explicaram.

Os resultados de pesquisa parecem confirmar as hipóteses da professora-pesquisadora: 1) nem todas as tarefas seriam executadas no tempo previsto; 2) as questões que demandavam explicação seriam, resolvidas parcialmente, ou deixadas em branco.

A questão 3 foi abordada apenas por 4 duplas, o que pode evidenciar que faltou tempo para a realização da mesma. Esse foi um problema vivenciado pela pesquisadora: conceder ou não mais tempo para a realização das atividades, optando-se por não dilatar o tempo, levando em conta aspectos didáticos: uma dilatação do prazo não foi explicitamente solicitada e, ao contrário, algumas duplas começaram a apresentar sinais de dispersão da atenção e decréscimo do nível de interesse. Nesse aspecto reside, talvez, uma das dificuldades da condução da pesquisa na sala de aula. Não podem ser desconsideradas as questões da ética; antes de se prestarem como fontes de pesquisa, os sujeitos são alunos, que querem aprender. Nesse ponto justifica-se nomeá-los colaboradores e não sujeitos de pesquisa.

A tabela 2 sintetiza os grandes dados, viabilizando uma análise macro do desempenho das duplas, que evidencia problemas ao nível de explicação da execução. Os registros escritos, que constituem os dados brutos da pesquisa permitem análises qualitativas do trabalho. Destaco, a título de exemplo dois registros.

A dupla de número 25, por exemplo apresentou a seguinte resposta à atividade 1c: “transformando para coordenadas polares, pois os limites de integração e o integrando

ficam mais simples; o limite de integração $\sqrt{2-x^2}$ sugere a equação de uma circunferência em que $y \geq 0$ e o integrando $4-2(x^2+y^2)$ sugere a equação de uma circunferência”. Apesar de algumas impropriedades de linguagem, percebe-se um esforço de justificativa, ainda que muitas colocações não tenham sido explicitadas, dentro daquele pressuposto básico do aluno, de que em matemática tudo é de certa forma óbvio, não é necessário explicar.

Algumas argumentações apresentadas trazem o novo, a originalidade da explicação que coordena outros esquemas, distintos daqueles pensados pelo professor. A dupla 38, embora tenha cometido alguns deslizes na formalização de seu argumento, foi a única a propor como solução para a questão 1c, que pedia a resolução da integral

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (4-2x^2-2y^2) dy dx$$

, a alternativa de uma estimativa de valor, a partir da

argumentação que se $m \leq f(x, y) \leq M$ em D então $m.A(D) \leq \iint f(x, y) dy dx \leq M.A(D)$, e a partir desse argumento determinar um intervalo de variação para a integral dada.

Os resultados de pesquisa apontam a importância de incentivar o aluno a explicar suas idéias, justificar os procedimentos adotados. Isso, de certa forma valida a estratégia de adoção de tarefas investigativas na sala de aula, pelo caráter intrínseco às mesmas de solicitarem do aluno levantar conjecturas, argumentar e contra-argumentar.

A riqueza do uso em sala desse tipo de tarefas para desenvolver a competência lógico-formal e o rigor matemático junto a alunos do ensino superior supera, a meu ver, os obstáculos apresentados. Questões relativas à falta de motivação e indisciplina não se fizeram presentes quando da realização da pesquisa; ao contrário, a gestão da sala de aula foi facilitada. O debate ocorrido no momento de socialização ganhou uma nova dinâmica e participação: todos os alunos haviam feito uma primeira discussão sobre o assunto, o que normalmente não ocorre quando o professor pede uma leitura ou resolução de exercícios em casa e o momento foi realmente uma oportunidade de reflexão conjunta e aprofundamento de argumentos.

Considerações finais

A pesquisa, que investigou alunos de Cálculo fazendo investigações na sala de aula, traz contribuições que podem ser relevantes do ponto de vista da prática docente:

- confirma a possibilidade de desenhar e desenvolver em sala atividades numa abordagem mais investigativa;
- confirma a possibilidade de tarefas investigativas como elementos de motivação e desenvolvimento da autonomia no processo de aprendizagem matemática;
- apresenta um novo instrumento de avaliação, que permite uma análise do desempenho do aluno levando em conta os aspectos de execução e explicação da execução.

De um modo geral os professores procedem a análises globais de desempenho de suas turmas, fundamentando-se na nota atribuída, utilizando medidas estatísticas, como a média e o desvio padrão. Professores costumam por vezes, ainda, sistematizar e comentar os principais erros ocorridos. Essas iniciativas ilustram uma intenção de gerar um conhecimento acerca do aluno e realizar uma reflexão a partir da prática.

A categorização das questões quanto aos dois aspectos de execução da tarefa e explicação dos procedimentos e raciocínios adotados fornece uma nova matriz de avaliação de trabalhos escolares, que possibilita verificar o fazer matemático do aluno e o explicar a matemática que foi feita, de aplicação fácil pelo professor.

Da interseção pesquisa e ensino inerente à pesquisa sobre a prática decorre uma alteração da dinâmica da sala de aula de Cálculo, onde se passa a fazer e explicar matemática através da adoção de práticas que incentivem no aluno uma postura investigativa e aumentem o grau de sua capacidade argumentativa.

A pesquisa apresenta limitações, decorrentes do seu desenvolvimento em um ambiente real de sala de aula de uma universidade, no qual se espera a menor interferência possível na coleta de dados, e da limitação de espaço, que viabilizou a discussão dos dados de apenas uma das atividades, dentre as que integram a proposta geral de trabalho que vem sendo desenvolvida pela professora-pesquisadora. O relato feito integra um programa de pesquisa em práticas investigativas na sala de aula de Cálculo, que com o tempo pode ganhar maior robustez enquanto pesquisa sobre a prática, através da análise de um maior volume de dados e tipos variados de atividades.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; OLIVEIRA, H. Matemática para Todos – investigações na sala de aula. In: ABRANTES et al. (orgs.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996, p. 165-172.

ARTZT A. F.; ARMOUR-THOMAS, E. Mathematics teaching as problem solving: a framework for studying teacher metacognition underlying instructional practice in mathematics. *Instructional Science*, 1998, v. 26, n.1-2, p. 5-25.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES et al. (orgs.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996, p.

KLAHR, D., LI, J. Cognitive Research and elementary Science Instruction: From the laboratory, to the Classroom, and Back. **Journal of Science Education and Technology**, v.14, n.2, p.217-238, 2005.

NASSER, L. Educação Matemática no Ensino Superior. In: VIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais ...**, 2004. p. 1-6.

PONTE, J. P. **Investigando as aulas de investigações matemáticas**. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/p_133-151.PDF> Acesso em: 10/02/2005.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H., **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.151p.

SCHÖN, D. A. (2000). **Educando o Profissional Reflexivo**: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed. 256p.