A MEDIDA DE COMPRIMENTO E OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS SOB O PONTO DE VISTA DA TAD NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL

SILVA, Maria José Ferreira da – PUC/SP – zezé@pucsp.br
GT-19: Educação Matemática
Agência financiadora: Bolsa de capacitação docente da PUC/SP

Resumo

Este artigo trata de parte de uma formação de professores dos terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental focando a concepção de medida de números fracionários modelada segundo a Teoria Antropológica do Didático em termos de tipos de tarefas e as possíveis técnicas que as resolvem, bem como as tecnologias que justificam essa técnica, justificadas por sua vez pela teoria dos números racionais. Observamos as concepções mobilizadas pelos professores em situação de elaboração de uma seqüência para o ensino desse conteúdo para a quinta série, de acordo com o modelo construído.

Palavras-chave: números fracionários, frações, medidas.

Introdução

O ensino e aprendizagem dos números fracionários[1] é discutido há muito tempo por diversos pesquisadores. Jahn e outros (1999) mostram que a introdução de números fracionários nas séries iniciais pelo procedimento da dupla contagem das partes, em superfícies totalmente divididas em partes congruentes, conduz a criança a entender os fracionários, como se fossem dois números naturais: um que se coloca em cima e outro abaixo de um traço.

Mudando o foco para o professor fizemos uma reflexão sobre o ensino de fracionários com alunos do quarto ano de magistério em uma formação apoiada nas concepções[2] de números fracionários: parte todo, medida e quociente. Em estudos

---

[1] Trataremos por números fracionários todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações.

[2] Adotamos a noção de concepção de acordo com Artigue (1990) segundo a qual esta noção auxilia o estudioso da didática por suas funções de evidenciar a pluralidade de pontos de vista para um mesmo objeto matemático, a diferenciar as representações e os tratamentos que lhes são associados. A

preliminares constatamos que professores, do primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental mobilizavam com predominância a concepção parte-todo e sentiam necessidade de as figuras estarem totalmente divididas em partes congruentes, além de não perceberem o número fracionário como quociente. Em situações de correção de respostas supostamente de alunos, esses professores acreditavam que o aluno errava, sobretudo, por falta de atenção. Quanto aos futuros professores mostra que, ao final da formação, eles passaram a tratar situações que envolviam fracionários de forma mais crítica.

A importância do estudo dos números fracionários tanto para o ensino, quanto para a aprendizagem é indiscutível e confirmada em relatório do SARESP:

> As frações geralmente introduzidas na 3ª série são trabalhadas até a última série do primeiro grau, sendo que, nas duas últimas, numa abordagem algébrica. [...] A proposta curricular reserva um lugar muito especial para a fração [...] sua inclusão levou em conta que este tema além de fazer parte de um acervo cultural básico, é fundamental para o desenvolvimento de outros assuntos essenciais dentro e fora da Matemática. (SARESP, 1995, p. 97).

Por outro lado, o mesmo relatório do SARESP sugere:

> Cabe ao professor das séries iniciais a responsabilidade das experiências para o ensino dessas idéias/interpretações das frações [parte/todo, quociente, razão, operador] e espera-se que o aluno, ao chegar a quinta série domine não só o conceito, mas também representar frações, operar com elas e utilizá-las na resolução de problemas. (SARESP, 1995, p. 97).

Tal comentário pode sugerir aos professores de quinta série que seus alunos já construíram o conceito de números fracionários e estão aptos a solucionar problemas que solicitem a mobilização desses números como parte-todo, quociente, razão e operador o que provoca uma ruptura problemática para a aprendizagem dos alunos.

Enquanto participante de um projeto de pesquisa que tratou da formação continuada de professores do terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental da rede estadual, em Geometria, constatamos, em diversas situações, algumas dificuldades dos professores no trato com os números fracionários e nos questionamos a respeito da prática desses professores quando tratavam desses números. Ao mesmo tempo, nos perguntávamos como poderia ser uma formação contínua eficaz para promover mudanças na prática dos professores e uma melhor aprendizagem para os alunos.

---

autora classifica as concepções em dois tipos: a matemática que se relaciona ao conteúdo propriamente dito e as desenvolvidas pelos sujeitos culturalmente ou em processo de aprendizagem.

Em continuidade ao mesmo projeto planejamos uma formação para professores de Matemática dos ciclos finais do Ensino Fundamental que tratasse especificamente de números fracionários. O objetivo prático dessa formação era permitir o acesso a resultados de pesquisa sobre fracionários baseados, principalmente, nas concepções tratadas por Behr e outros (1983): parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Como objetivo de pesquisa buscou-se observar as concepções dos professores a respeito desses números, mobilizadas durante a elaboração de uma seqüência de ensino para quinta série, bem como suas dificuldades e autonomia durante essa construção. Acreditamos que uma formação, tanto inicial como continuada, deve relacionar três campos de ação: o estudo do conteúdo, a análise didática de situações-problema e uma análise de práticas docentes.

Dessa forma, focaremos, neste artigo, uma proposta de Organização Matemática sobre a concepção de medida em termos de tipos de tarefas e possíveis técnicas para resolvê-las, bem como o discurso tecnológico-teórico que as justificam que serviu de base para parte da formação. Analisaremos ainda os tipos de tarefas apresentados na Organização Didática elaborada pelos professores que solicitavam a mobilização dessa concepção. Essas organizações baseiam-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard.

O Problema

Muitos autores têm-se dedicado a questões a respeito do ensino e aprendizagem dos números fracionários. Para Garcia (2003) os programas de formação de professores devem considerar não só o conhecimento de noções matemáticas, mas também a forma de entender e dar significado a essas noções. A autora utiliza resultados de pesquisas que mostram as dificuldades dos alunos com números fracionários em uma proposta para formação de professores. Acredita que a apresentação tradicional dos números fracionários que abusa de representações contínuas vinculadas sobretudo ao círculo (a célebre pizza), sem considerar outras representações contínuas (como a do retângulo) ou discretas (como fichas) provavelmente seja a causa do problema.

Sallán (2001) apresenta uma proposta didática com o objetivo de incrementar a compreensão de futuros professores da educação primária a respeito dos números racionais positivos e fortalecer as conexões entre as notações fracionária e decimal focando os sistemas de representação. Em sua pesquisa, mostra que existe relação entre os conhecimentos pessoais e atuação profissional: quanto maior e melhor for o domínio conceitual do professor, maior será sua competência em tarefas profissionais, como a revisão de tarefas e as explicações que oferecem às atividades propostas aos alunos.

Um grupo de pesquisa que estuda a aprendizagem de números racionais, desde 1979, é o *Rational Number Project* (RNP), em uma retrospectiva desse programa de pesquisa colaborativo, Cramer e outros (1998), lembram que o primeiro trabalho estudou o impacto de materiais manipulativos na compreensão das crianças do conceito de número racional e, que os últimos, estendem o estudo dos números racionais para proporcionalidade. Citam colaboradores como Tom Kieren para quem o domínio matemático dos números racionais é construído, com base em uma visão integrada das concepções: medida, quociente, operador e razão e, das relações entre elas.

Embora, esses trabalhos nos permitam observar algumas estratégias de formação de professores das séries iniciais com enfoques diferentes e importantes, não encontramos trabalhos que tratassem da formação continuada ou do tratamento dado aos números fracionários por professores dos ciclos finais do Ensino Fundamental o que justifica nosso interesse pelo assunto. Assim, para completar nossa problemática continuamos observando questões do ensino de números fracionários.

Os números fracionários e seu ensino

A presença da matemática na escola, segundo Chevallard (1992), é conseqüência de sua utilização na sociedade e não algo feito exclusivamente para ser ensinado na escola reduzindo seu valor social a um mero valor escolar e transformando o ensino escolar da matemática em um fim em si mesmo. Pelo contrário, o ensino da Matemática atende a uma necessidade social e também individual, visto que cada indivíduo deve saber um pouco de Matemática para resolver ou, simplesmente, reconhecer os problemas com os quais se depara na convivência social.

Buscamos, assim, pesquisadores que levantassem pontos importantes para o ensino desse conteúdo. Post, Behr e Lesh (1982) tratando da equivalência entre fracionários afirmam que se pode constatar a existência ou não dessa equivalência com base na utilização de materiais manipulativos e em alguma habilidade para efetuar a "partição" de um objeto contínuo ou um conjunto de objetos discretos.

Kieren (1988) afirma que o modelo parte-todo para o ensino dos números fracionários auxilia na produção da linguagem fracionária, quando os textos de matemática escolares e o discurso do professor, orientam o estudante a uma imagem de dupla contagem: contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e contar quantas dessas partes são consideradas (numerador). Embora esse procedimento capacite a criança a produzir respostas corretas em algumas situações, desenvolve um modelo mental não apropriado (partes de um inteiro), em vez de um mais poderoso, sugerido por Vergnaud, em 1983, que é o da medida (comparação com a unidade).

Quanto às representações disponíveis para os fracionários, Adjiage e Pluvinage (2000), indicam a das retas graduadas porque apresentam um conjunto de características favoráveis para o ensino de fracionários, como a familiaridade aos alunos, a flexibilidade de utilização (mudança de unidades, por exemplo), a boa adequação com as percepções de somas ou de algumas relações, como a duplicação de um segmento.

Carpenter e outros (1994) propõem, para reverter o quadro do ensino de procedimentos para operar com frações, que seja usada uma extensão direta das operações de adição e subtração com inteiros, contando com o desenvolvimento dos conceitos de unidade e equivalência. De maneira similar, sugerem a construção da multiplicação de frações sobre os conhecimentos dessa operação com naturais na forma de comparação multiplicativa (multiplicação escalar) e a concepção de fracionário como operador (racional operando sobre racional). A multiplicação de números racionais para Behr e outros (1992), pode ser introduzida como uma extensão da multiplicação de números inteiros a partir de situações que peçam a parte de uma parte, por exemplo, a metade de um quinto.

Por outro lado, Post, Behr e Lesh (1982), entendem que a construção dos números racionais não é simples e propõem que sejam caracterizados por uma série de subconstruções distintas, embora relacionadas: medida, quociente, operador, razão e parte-todo, sugerindo uma análise mais refinada de cada uma delas.

Esses, entre outros estudos, nos remetem a possibilidade de considerar alguns desses resultados na formação de professores do Ensino Fundamental, principalmente aqueles que lecionam na quinta série. Dessa forma, como um estudo preliminar à formação, analisamos cada uma das concepções de números fracionários utilizando a Teoria Antropológica do Didático. Segundo Bosch e Chevallard (1999) essa teoria permite analisar, descrever e estudar as práticas institucionais por meio de uma organização de um determinado saber matemático. Em parte, essa Organização ou

Praxeologia Matemática é o objetivo que o professor pretende alcançar quando ensina, ao mesmo tempo em que embasa a elaboração da praxeologia ou Organização Didática que será colocada em prática na sala de aula.

O primeiro aspecto dessa organização caracteriza o saber-fazer e é designado por Chevallard (2002) como um **bloco prático-teórico** porque considera que toda ação humana, inclusive, as atividades matemáticas cumprem uma tarefa (t) de um certo tipo (T) por, pelo menos, uma determinada técnica (τ). O segundo aspecto caracteriza o saber em um sentido restrito e é designado por um **bloco tecnológico-teórico**, porque considera certa tecnologia (θ) que justifica a técnica (τ) e permite pensar sobre a técnica e produzir novas técnicas, além de uma teoria (Θ) que, por sua vez, justificaria tal tecnologia.

Olhando para o professor, Chevallard (2002) entende que *"ensinar um certo tema matemático"* é um tipo de tarefa que consiste em *"ensinar uma organização praxeológica de natureza matemática".* Assim, para ele o problema do professor de Matemática é construir praxeologias, de natureza didática e observar que seus componentes teóricos e tecnológicos podem tornar-se desacreditados quando novos tipos de tarefas problemáticas se apresentam.

Partindo do pressuposto de que um professor de matemática, depois de alguns anos de carreira, geralmente cumpre de maneira rotineira a tarefa de ensinar números fracionários, os colocamos frente a uma situação problemática: construir uma Organização Didática para o ensino de números fracionários para uma quinta série que se apóie em uma Organização Matemática previamente construída e que considere resultados de pesquisas. Para Chevallard (1999) uma tarefa é rotineira quando a resposta para ela é imediata e, é problemática quando é necessário elaborar toda uma organização para responder a questão colocada na tarefa. O que para ele justificaria a necessidade de formação contínua para professores por conta do abandono de tarefas problemáticas ou da problemática didática provocada por tais problemas.

Concordamos com Shulman (1987) quando afirma que a transformação dos conteúdos em produtos de ensino é uma maneira de observar a compreensão do professor sobre um determinado assunto e sua capacidade para ensiná-lo. Assim, observamos as concepções de números fracionários (em especial a de medida) que os professores mobilizam, quando se propõem a ensinar esse conteúdo à quinta série.

Uma Organização Matemática para a formação

Com o propósito de organizar o conteúdo matemático dos fracionários considerando suas diversas concepções elaboramos uma Organização Matemática (OM) como base para a formação dos professores. De acordo com a TAD, entendemos esta organização como uma produção de uma *instituição* universitária que busca descrever os tipos de tarefas que associam as diversas concepções de números fracionários (ou relações entre tais concepções) verificando as técnicas que podem ser manipuladas na resolução de cada um deles.

Para Bosch, Fonseca e Gascón (2004), a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer a elaboração de uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da *Organização Matemática Local* (OML) que integrarão uma *Organização Matemática Regional* (OMR). Por exemplo, o tipo de tarefa: *identificar o fracionário que corresponde a uma figura apresentada* constitui uma OMPontual. Já uma OMLocal agrupa OMPontuais quando estas têm uma mesma tecnologia justificando suas técnicas.

Nosso interesse residia na construção de OM Locais que colaborassem na construção de significados às diversas concepções de números fracionários, em especial a medida, tanto para os professores envolvidos como para alunos de quinta série. Dessa forma as concepções de fracionários serão entendidas como tecnologias que justificam as técnicas consideradas que se baseiam na teoria dos números racionais.

Mas, de acordo com Pluvinage (1998), são as representações que dão vida ao objeto matemático e, comumente, utilizamos representações de registros da língua natural, do registro algébrico, do registro figural-geométrico e do registro funcional-gráfico. Para, Bosch e Chevallard (1999) a conceituação, na atividade matemática, tende, geralmente, a reforçar as ferramentas matemáticas utilizadas, quando consideram que os objetos sensíveis como discursos, escritas e grafismos centralizam não os próprios objetos, mas o que eles "representam" ou "significam", isto é, seu sentido.

Os autores definem dois tipos de objetos: os *ostensivos* como aqueles perceptíveis aos sentidos humanos e que podem ser manipulados: sons, grafismos e gestos; e os *não-ostensivos* como aqueles que, por si só, não podem ser vistos, ditos, entendidos ou percebidos porque para isso dependem da manipulação dos *ostensivos*. Na realização de uma atividade matemática, um complexo de objetos *ostensivos* são usados, em diversos registros, para permitir que um saber matemático e os conhecimentos por ele construídos materializem-se.

Baseados na TAD e na noção de concepção apoiaremos nossa Organização Matemática sobre dois pontos que consideramos fundamentais: as concepções de números fracionários associadas aos tipos de tarefas (ou que podem ser mobilizadas na realização das tarefas) e as representações que serão manipuladas nas técnicas utilizadas no cumprimento dessas tarefas. Neste artigo apresentamos somente os tipos de tarefas que solicitam a mobilização da concepção de medida de nossa OM.

A concepção de medida

A partir de um estudo epistemológico percebemos que, provavelmente, foi a necessidade de administração do estado que propôs a tarefa de medir grandezas, bem como a de registrar seus resultados. Na maioria das vezes, tratava-se de medir quantidades de terra, para que fossem tributadas. A tarefa de medir grandezas foi resolvida com a determinação de unidades e subunidades de medidas. Mas, a segunda, da escrita dos fracionários resultantes das medições, nem sempre foi cumprida de maneira satisfatória, porque algumas apresentavam ambiguidades, embora fossem justificadas pelo sistema de escrita dos números desenvolvidos naquela sociedade.

As tarefas de medições e os registros e cálculos com seus resultados tornaram-se rotineiros e mais necessários, fazendo com que migrassem para instituições de ensino, para garantir que outros pudessem aprender a resolver tais tarefas. Isso fez com que as técnicas de medições e a escrita e cálculos com seus resultados percorresse outro caminho que não o da prática.

O efeito dessa transposição de situações reais para o ensino, desde a antiguidade, se apresenta quando solicitam ações que não fariam sentido na realidade como, por exemplo, a proposta de dividir um veado em terços. Por outro lado, percebemos que as necessidades de medir, distribuir e, buscar as técnicas para cumprir essas tarefas apresentaram-se simultaneaneamente na Antiguidade.

O ensino do conhecimento desenvolvido aparece então por meio de tarefas que enfatizam o cálculo com fracionários e a descoberta de valores desconhecidos associados as concepções medida, quociente e razão para fracionários que se relacionam entre-si com as concepções parte-todo e operador.

Acreditamos que as tarefas que envolvem medições de comprimentos são apropriadas para a percepção da limitação dos números naturais, como resultados de medições, e da necessidade de "novos números" para a quantificação adequada de comprimentos. Essas tarefas associam naturalmente a concepção de medida e solicitam a manipulação de um padrão (unidade) que, por sua vez, dependerá diretamente da grandeza considerada. Optamos por tratar apenas de tarefas que envolvem medidas de comprimento, por entender que a construção de técnicas apropriadas para tais tarefas garantirá o desenvolvimento de técnicas para o tratamento de outros tipos de grandezas, mesmo que mais complexas.

As tarefas associadas à concepção de medida de comprimento, geralmente, podem solicitar a manipulação de três tipos de objetos *ostensivos*: a representação de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário *1/b* que representa uma subunidade, isto é, a unidade escolhida foi dividida em *b* partes para permitir a medição e o número fracionário *a/b* que representará o resultado da medição realizada permitindo a compreensão de que a subunidade *1/b* foi utilizada *a* vezes na medição efetuada. Notamos que a concepção parte-todo será mobilizada na divisão da unidade escolhida.

Em retas numeradas ou esquemas de medida, é necessário determinar o ponto de partida para a medição e o sentido em que a medição ocorrerá, podendo ser o zero ou um outro ponto qualquer. A utilização precoce da régua milimetrada em medições encaminha para a discretização do contínuo, porque exige como técnica somente a contagem de centímetros e milímetros escondendo suas origens como subunidades do metro.

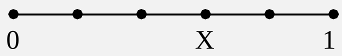
1º tipo: determinar medidas de comprimento de um objeto.

Este tipo de tarefa solicita medições de comprimentos e pode ser cumprida pela escolha de uma unidade de medição (tiras de papel, régua de polegada, régua milimetrada e outros instrumentos) para ser comparada com o comprimento que está sendo medido. Esta comparação encaminha à necessidade da divisão da unidade para possibilitar a quantificação do comprimento em jogo.

Nas primeiras tarefas deste tipo, o ideal é usar tiras de papel pois estas facilitam a divisão da unidade. É relevante utilizar unidades de medida diferentes para o aluno perceber que a quantificação do comprimento depende da unidade escolhida, isto é, o número que representa a medida varia de acordo com a unidade.

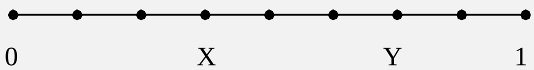
2º tipo: determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais.

Tarefa 1: *Qual a distância entre o zero e o X?*



Com o auxílio de um esquema de medida, que apresenta uma unidade dividida em partes iguais e um ponto que determina o comprimento a ser medido, a partir da origem. A tarefa poderá ser cumprida pela dupla contagem das partes, considerando que a unidade foi dividida em cinco partes de mesmo comprimento e que do ponto de origem até o ponto X existem três dessas partes podendo-se concluir que a medida solicitada é 3/5 da unidade. A concepção de medida em tarefas desse tipo está diretamente associada à concepção parte-todo.

Tarefa 2: *Qual a distância entre X e Y?*

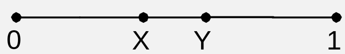


Esta tarefa, também está associada à concepção parte-todo e será cumprida a partir da dupla contagem das partes. O sujeito deve perceber que a unidade foi dividida em oito partes congruentes e que entre o ponto X e o ponto Y existem três dessas partes, associando a esse comprimento a medida 3/8.

3º tipo: Determinar medidas em segmentos não divididos em partes de mesma medida.

Tarefa 1: *Qual a distância entre 0 e X?*

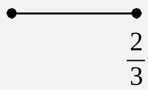
Tarefa 2: *Qual a distância entre X e Y?*



Nestes casos, é necessário dividir, convenientemente, o inteiro em partes de mesma medida para utilizar a dupla contagem e encontrar a medida de 0 a X ou de X a Y.

4º tipo: reconstituição da unidade

Tarefa: *Se o desenho abaixo representa 2/3 da unidade, qual é a unidade?*



É necessário perceber que se esse segmento representa dois terços, então, a unidade original foi dividida em três partes de mesmo comprimento e, destas, duas foram consideradas, isto é, temos duas vezes um terço. Assim, para cumprir a tarefa e recompor a unidade original é necessário dividir o segmento dado em duas partes de mesma medida para identificar $\frac{1}{3}$ e elaborar uma nova figura com três dessas partes, ou prolongar a figura dada, conforme a **Figura 2**.

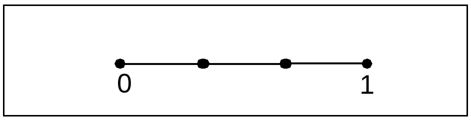


Figura 2: concepção de medida, reconstituição da unidade.

Os tipos de tarefas que associam a concepção de medida permitem ainda a introdução da equivalência entre fracionários, baseada no reconhecimento de que a mesma parte pode receber nomes diferentes, em função de novas divisões da unidade ou a familiarização com tais conhecimentos se estes já foram trabalhados anteriormente.

A variação do objeto a ser medido, nesses tipos de tarefas, ou do esquema apresentado permitirá ao sujeito mobilizar a concepção de medida de comprimento em tarefas mais complexas, como as que apresentam esquemas maiores que a unidade que permitem a manipulação de fracionários maiores que 1, tanto na forma mista como na imprópria. Além disso, podem ser associadas à soma de números fracionários, como podemos ver na **Figura 1**, em que o sujeito percebe que a distância de 0 a X pode ser representada por $1\frac{3}{5}$, que é o mesmo que $1+\frac{3}{5}$, um número localizado entre o 1 e o 2 porque, diferente das tarefas anteriores, o esquema permite uma ordenação dos fracionários.

Os esquemas de medida também permitem introduzir as multiplicações de fracionários em tarefas que peçam a multiplicação de um fracionário por escalar ou a parte de uma parte, que podem ser registradas no próprio esquema.

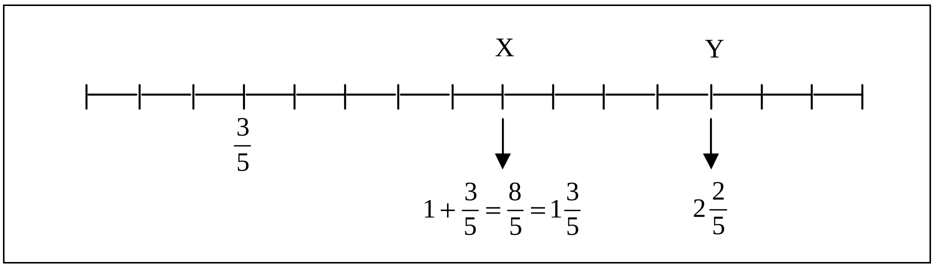


Figura 1: concepção de medida, 2º tipo.

A formação

A formação teve início no segundo semestre de 2003, em uma Escola da Rede Pública Estadual, na cidade de Arujá, com 15 professores, terminando em abril de 2004 com apenas 9 deles realmente engajados e comprometidos com as discussões realizadas.

Com um total de 29 sessões os trabalhos foram realizados em seis etapas. A primeira delas consistiu de um momento de familiarização com o novo projeto e algumas discussões, em grupos, sobre o material coletado individualmente. Discutimos também um questionário que os professores responderam no início do projeto que solicita análise de possíveis respostas de alunos para questões que envolviam fracionários. Nosso objetivo era fazer com que eles explicitassem as dificuldades que acreditavam que os alunos tenham para abordá-las na elaboração da organização pretendida. Depois de cinco sessões decidiram o melhor caminho para o ensino de números fracionários para a quinta série.

A segunda etapa caracterizou-se pelo trabalho em grupo com o objetivo de apresentar uma organização para o ensino. A cada sessão tinham que ser lembrados do caminho que decidiram ser o melhor e das concepções de fracionários que levantaram utilizando o dicionário, pois esperávamos que se preocupassem com essas decisões durante a elaboração da Organização Didática. No final dessa etapa apresentaram um esboço do caminho que cada grupo pretendia seguir.

Na etapa seguinte aconteceu a formação específica sobre números fracionários, que se justificou pela constatação de que só um dos grupos conseguiu estruturar uma organização, enquanto os outros apresentaram atividades isoladas. Nessa formação mostramos uma breve retrospectiva da gênese desses números e uma síntese de tarefas que solicitam a mobilização das concepções de números fracionários, de acordo com a Organização Matemática elaborada pela formadora. Discutimos ainda as orientações dos PCN para o ensino do tema. A seguir apresentaram como as organizações estavam sendo elaboradas e percebemos poucas alterações. Sugerimos então uma que analisassem uma série de situações que envolvem os fracionários ao longo do Ensino Fundamental, pois acreditávamos que uma visão mais ampla pudesse ajudá-los na re-elaboração de sua Organização didática. Pedimos que para cada situação identificassem a concepção que poderia ser mobilizada, em que conteúdo e a série na qual poderia ser tratada.

Durante a quarta etapa os professores terminaram a Organização Didática em grupos e entregaram à formadora no último encontro do ano.

Retomando o trabalho depois das férias, iniciamos a quinta etapa de nossa formação discutindo as Organizações produzidas pelos professores. Constatou-se que não apresentavam autonomia suficiente para executar suas decisões nas organizações que elaboraram, o que nos levou a apresentar uma Organização didática elaborada pela formadora. Percebemos que precisavam de auxílio e com base na discussão dessa organização e de algumas mudanças sugeridas pelos professores, nos preparamos para a aplicação dessa Organização em uma sala de quinta série da escola.

A sexta e última etapa consistiu na aplicação da Organização Didática em uma quinta série da escola e da análise de tal aplicação. Por uma questão de tempo aplicamos apenas algumas fichas da organização, mas a professora da sala decidiu acompanhar as aulas e continuar a aplicação com o auxilio dos colegas que participavam do projeto.

Análise da produção dos professores

Analisamos as seqüências elaboradas pelos professores para o ensino de números fracionários para a quinta série, como Organizações Didáticas (OD) construídas em uma instituição escolar porque segundo Bosch e Gascón (2002) as OD e OM escolares tornam-se transparentes para os sujeitos da instituição que as assumem e as transmitem por meio de suas práticas institucionalizadas. De acordo com Chevallard (1999) é conveniente aprofundar o estudo dessas Praxeologias, por meio de um estudo empírico com análise dos dados recolhidos de observação. Assim, uma Organização Didática de uma instituição escolar articula-se, segundo o autor, em tipos de tarefas (geralmente, cooperativas), em técnicas, em tecnologias, em teorias mobilizadas para o estudo concreto de um determinado tema, em uma instituição concreta. Em outras palavras, estudar uma OD é **o como** estudar a OM desse tema, identificando as ações que podem ser vistas como didáticas. A seguir apresentamos os tipos de tarefas que solicitam a mobilização da concepção de medida que fizeram parte da OD elaborada pelos professores durante a formação.

Tipo: dividir um inteiro em partes iguais

As tarefas desse tipo apresentam figuras de superfícies para serem divididas em partes "iguais". Uma delas solicita a construção com régua e compasso de um triângulo eqüilátero com a seguinte redação:

> Tarefa: Dividir os lados de um triângulo eqüilátero, com auxílio de barbante, em cinco partes iguais e por meio de retas paralelas dividir o triângulo em 25 triângulos menores, mostrando que esses segmentos estão paralelos. A seguir, identificar figuras geométricas no interior do triângulo maior: dois losangos azuis, um trapézio vermelho, dois hexágonos amarelos e seis triângulos verdes. Finalizando, preencher uma tabela que associa a cada figura a parte do todo.(Prof. Fabiana, OD individual).

Seguida da orientação:

> Comentar com os alunos que, para obter uma fração de um todo contínuo, significa dividi-lo em partes com medidas iguais, enquanto, para obter uma fração de um todo discreto, é preciso dividi-lo em partes iguais que tenham a mesma quantidade de objetos, pessoas, elementos.

Vemos que a ação do aluno está centrada na construção do triângulo e suas divisões baseadas no Desenho Geométrico e emprego de ferramentas de desenho e a recomendação da professora sugere a técnica da dupla contagem das partes para a identificação de um fracionário, tanto em grandezas contínuas como em discretas.

Tipo: determinar medidas de objetos

A professora apresenta duas tarefas solicitando medidas de comprimento e de área das faces das caixas.

A prof. Gina, com o objetivo de: *conscientização quanto ao problema do lixo que afeta o planeta Terra e utilizar sucatas para demonstrar que as frações correspondem a partes iguais, independentes do objeto,* solicita a leitura de um texto sobre reciclagem de lixo para utilizar seis caixas de papel (sucatas), com diferentes dimensões, em algumas tarefas.

Embora solicite a medição do comprimento e da área das faces das caixas, estas são feitas pela contagem, visto que o aluno utilizaria a régua para determinar as medidas e a divisão dessas medidas para obter a fração que corresponde às partes congruentes das faces das embalagens.

Diante das situações que foram exploradas e das discussões durante a formação, esperávamos que mobilizassem OM mais ricas em tipos de tarefas que associassem a concepção de medida. Constatamos que foi desequilibrador, para esses professores, perceber o próprio *não-saber* relacionado a um assunto que tinham certeza dominar, por comentários ocorridos durante a formação.

> As frações estão fazendo meu cérebro se dividir. Se nem nós sabemos todos os significados de fração, como nós queremos que nosso aluno saiba? ... Quando eu era criança, para mim, fração era divisão. (Prof. Fabiana, 22/8/03, p. 5)
>
> Quando eu falo de razão (20/200) eu posso dar significado de parte/todo. (Prof. Gina, 22/8/03, p. 6).
>
> (Ficamos angustiados) porque percebemos nossa dificuldade (Prof. Fabiana, 5/9/03, p. 1)
>
> Quanto mais nós estudamos, mais nós percebemos que precisamos aprender (Prof. Gina, 5/9/03, p. 1)
>
> Percebo quanta coisa eu fiz de errado. (Prof. Bruno, 5/9/03, p. 1).

Para Chevallard (1999) quando um professor prepara sua obra sobre uma certa matéria ele “observa” um ou vários livros, “analisa” (superficialmente) seu conteúdo, “avalia” o conteúdo e por fim “desenvolve (rapidamente) seu próprio produto: as aulas. Por outro lado, Bosch e Gascón (2001) acreditam que algumas tarefas do professor são rotineiras e bem definidas, não colocando, em princípio, grandes problemas, por exemplo: escolher um livro, preparar um curso, realizar as aulas, escolher os exercícios, fazer provas, participar de reuniões etc.

Constatamos que, com nosso grupo de professores, não foi bem assim, para eles essas tarefas podem ser rotineiras para uma ação sem reflexão, embasada na reprodução de livros didáticos e não em situações de aprendizagem que, de certa forma, já haviam tido contato, na primeira fase do projeto. Contudo, mesmo concordando em elaborar uma seqüência para o ensino de fracionários para quinta série os professores apresentaram em suas produções planos de aula, com orientações para aplicação, no sentido de rever o conteúdo.

Acreditávamos que pudessem transferir a experiência anterior para elaboração de uma seqüência ao ensino de um conteúdo que, aparentemente, dominavam com a colaboração da formadora, pois as queixas eram sempre em relação ao *não-saber* do aluno sobre o assunto. Depois de 28 semanas de trabalhos a formadora apresentou uma seqüência de ensino para a quinta série e ajudou a aplicar em uma sala escolhida pelos professores. A respeito da concepção de medida uma das professores afirma:

> Eu participei os cinco dias e nos primeiros [...] fiquei desesperada. [...] adoraram usar a régua de polegadas. Eu achei maravilhoso ver o aluno aprendendo. (Prof. Gina, 16/4/04, p. 2).

Considerações finais

Entendemos que a OM escolhida para a formação, considerando resultados de pesquisas e um novo olhar para o tema, é uma contribuição para a instituição escolar no sentido de explicitar uma variedade de tipos de tarefas e técnicas que permitem a conceituação de fracionários para a quinta série e ainda que o professor faça suas próprias escolhas verificando que tipos de tarefas ou técnicas precisa modificar, acrescentar ou retirar.

Durante toda a formação houve a explícita interação entre pesquisadores e sujeitos da situação para estabelecer a prioridade dos problemas a serem tratados e prever o acompanhamento das decisões, ações e de toda atividade intencional no processo. Os professores participaram ativamente dos trabalhos embora o tema de estudo não tenha sido escolhido pelo grupo, porque percebemos que não o fariam visto que acreditavam nas dificuldades dos alunos e em seu pleno domínio do assunto.

Mas, a maior dificuldade apresentada no tratamento do conteúdo e, de forma geral, foi fazer relações entre tarefas ou entre técnicas mostrando, muitas vezes, na falta de um olhar crítico para as situações, o não desenvolvimento de capacidades para construir ou analisar com certo objetivo. Embora iniciassem o processo buscando saídas para a aprendizagem dos alunos e afirmassem que estes nada sabiam a respeito de números fracionários, percebemos, no decorrer das atividades, a compatibilidade dessas afirmações com seus próprios *não-saberes* que explicitados tornaram-se conscientes e os conduziram a momentos de angústias, incertezas e inseguranças.

Para esses professores, o trabalho com frações é pautado no livro didático e consequentemente, na dupla contagem das partes. O tratamento das concepções de fracionários que o relatório do SARESP recomenda não faz parte de sua prática e mudála, no sentido de ampliar sua visão para os números fracionários não é tarefa fácil. Eles estão habituados à utilização de algoritmos para tudo o que se refere às frações.

O tratamento de medição se apresenta diretamente ligado à régua milimetrada e consequentemente à utilização do registro decimal o que impede um trabalho com outras unidades de medição.

De forma geral, nossas análises permitiram indicar algumas mudanças nas concepções de números fracionários, não tanto por garantir que estejam aptos a promover ações formativas eficazes com autonomia para a aprendizagem do assunto por seus alunos, mas, por conscientizá-los da limitação do domínio que tinham do conteúdo, além da não eficácia de um ensino baseado em regras, sem compreensão. Não acreditamos que possam voltar às antigas práticas para tratar de fracionários.

Referências bibliográficas

ARTIGUE, Michèle. *Épistémologie et Didactique*. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 10-2.3, Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1990. p. 241-286.

BEHR, Merlyn J. et al. *Rational-number concepts.* In *Acquisition of mathematical concepts and* process. New York: R. Lesh e M. Landau (Eds.), 1983, p. 91-123).

_____. *Rational Number, Ratio and Proportionality.* 1992. In PME-NA XX, volume I (p. 89-93) Raleigh, North Carolina.

BOSCH, Marianna; CHEVALARD, Yves. *La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs.* In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 1999, v. 19, nº 1, p 77-124.

BOSCH, Marianna; FONSECA, Cecílio; GASCÓN, Josep. *Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales em las instituciones escolares.* In: **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 24/2.3, Grenoble, França: La Pensée Sauvage, 2004, p. 205-250.

CARPENTER, Thomas P. et al. *Teaching and learning racional numbers,* versão preliminar, Winsconsin Center for Education Research, 1994.

CRAMER, Kathleen et al. *Research on rational number, ratio and proportionality.* 1998. PME-NA XX, v. 1, pp. 89-93.

CHEVALLARD, Yves. *Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique.* In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**. V. 12, nº 1, p. 73-112, 1992.

______. *L´analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique.* In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 19. nº 2. 1999, p.221-266.

_____. *Organiser l´etude. 1. Structures & Fonctions.* Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletronica.

GARCIA, Mª Victoria Sanches. *Dificuldades específicas em el aprendizage de las fracciones. Estúdio de casos.Implicaciones para la formación de maestros.* Ministério de Education, Cultura y Desporte. 2003. p. 10-27.

JAHN, A. P. et al. *Lógica das equivalências*. In: 22ª Reunião Anual da ANPEd – Associação Nacional de Pós Graduação e Pesquisa em Educação. Caxambu/MG. 1999.

KIEREN, Thomas E. *Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development.* In: Number Concepts and Operations in the middle grades. J. Hiebert & M. Behr (Eds.). 1988, p. 162-181.

POST, Thomas, BEHR, Merlyn, LESH, Richard. *Interpretations of Rational Number Concepts.* In: **Mathematics for Grades 5-9**. Reston, Virginia: L. Silvey & Smart (Eds.). 1982, p. 59-72.

PLUVINAGE, François. *La natures des objets mathematiques dans le raisonnement.* In Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg. 1998. p. 125-138.

SALLÁN, José Maria Gairín. *Sistemas de representación de números racionales positivos. Um estúdio com maestros em formación.* In Contextos Educativos, 2001, p. 137-159.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. *Programa de Avaliação Educacional. Avaliação do Rendimento das Escolas Públicas do Estado de São Paulo – etapa 94.* (SARESP), 1995.

SHULMAN, Lee S. *Conocimiento y enseñanza.* In: **Estudios públicos**, 83. Centro de Estúdios Públicos. Traduzido por Alberto Ide. Chile: Santiago, 1987. p.163-196.