MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELOS POBABILÍSTICOS

MIGUEL, Maria Inez Rodrigues–PUC-SP–minez@pucsp.br
GT: Educação Matemática/n.19
Sem Financiamento

Resumo

Neste artigo, descrevemos uma experiência de ensino e de aprendizagem do Modelo de Poisson, dirigida a alunos universitários, baseada na modelagem matemática, tendo o computador como ferramenta de cálculo e de representação. Nos baseamos em um marco teórico sobre o significado institucional e pessoal de objetos matemáticos e analisamos aqueles referentes ao Modelo de Poisson. A análise dos resultados evidenciou que muitos dos elementos de significado passaram a fazer parte do conhecimento dos alunos e outros sugerem novas investigações. A pesquisa mostra que é possível desenvolver o estudo de modelos probabilísticos baseando-se na modelagem matemática e sugere algumas etapas, consideradas essenciais no ensino.

Palavras chave: modelagem matemática, ensino e aprendizagem em estatística, Modelo de Poisson.

Introdução

Em um curso introdutório de estatística a nível universitário, a escassez de tempo disponível e os conhecimentos prévios dos estudantes podem impedir que seja feito um estudo completo e significativo sobre o tema. É necessário, entretanto, desenvolver noções básicas sobre as distribuições de probabilidade, pois a compreensão das mesmas influencia os erros de aplicação dos procedimentos inferenciais, como os testes de hipótese (BATANERO; TAUBER; SÁNCHEZ, 2001).

A dificuldade de um tema depende, em grande parte, do ensino implementado; por esse motivo, nosso objetivo foi construir uma seqüência didática que pudesse favorecer a aquisição de noções básicas dos modelos probabilísticos, além de aplicá-la a um grupo de alunos e avaliar os resultados, valendo-se da Teoria das Funções Semióticas (Godino, 2003). A seqüência é norteada pelo uso da Modelagem Matemática e incorpora o uso de computadores como ferramenta de cálculo e representação.

Nossa opção em centrar a pesquisa no Modelo de Poisson deve-se às dificuldades apresentadas pelos alunos, à falta de pesquisas sobre o tema, à carência de material didático diferenciado e à relevância do modelo no estudo de fenômenos biológicos (contagem de bactérias em uma lâmina de Petri), físicos (desintegração radioativa), sociais (bombardeio aéreo sobre Londres), além das inúmeras aplicações relacionadas ao Processo de Poisson, tempo de espera e a possibilidade em trabalhar de modo interdisciplinar com a Física. O estudo não se limitou ao ensino do Modelo de Poisson, abrangendo parte da Estatística Descritiva e Inferencial.

Este estudo, portanto, enquadra-se no campo da Didática da Matemática e é direcionado para os aspectos que envolvem o uso da Modelagem Matemática no ensino. No que se segue, descrevemos a problemática, as questões de pesquisa, hipóteses e objetivos, os fundamentos do estudo, a metodologia adotada e uma análise dos resultados, com as principais conclusões.

Problemática

Encontramos poucas publicações específicas sobre os modelos probabilísticos. Em 1997, Henry e Dantal propuseram a introdução do Modelo de Poisson, por aproximação do Modelo Binomial, a alunos do terceiro ano do Ensino Médio francês, mas sem fase experimental. Em relação a ela, duas questões podem ser levantadas: como justificar a aproximação entre os modelos, quando o número de repetições não tende a infinito? Como transpor a aplicação do Modelo de Poisson a situações que envolvem área ou volume?

Na atualidade é observada uma tendência em valorizar o caráter instrumental da matemática para resolver problemas, envolvendo o relacionamento entre teoria e prática. Henry (1997) sugere que os alunos sejam colocados diante de situações aleatórias da realidade e apresenta seis etapas para a aplicação de um processo de modelagem: realidade, modelo pseudo-concreto, modelo matemático, estudo matemático, confrontação modelo-realidade e generalização-previsão. Em 2003, o mesmo autor propôs um Trabalho Dirigido (TD) na *XII^{ème} École d'Été de Didactique des Mathématiques*, em que o experimento realizado foi uma simulação da desintegração radioativa por programa de computador.

A pesquisa de Coutinho (2001) foi centrada no ensino e aprendizagem, no sentido de buscar condições didáticas para que alunos do ensino básico se familiarizassem com situações aleatórias em contexto escolar, valendo-se do dinamismo que o ambiente *Cabri-geomètre II* proporciona. No processo de modelagem, dois domínios foram utilizados por essa autora: o concreto e o pseudo-concreto. Os resultados dessa pesquisa indicam que os alunos entre 14 e 16 anos adquiriram ferramentas de representação e de interpretação de fenômenos aleatórios que os levou a construção do significado de um valor de probabilidade determinado, assim como a estimação de uma probabilidade.

Para Girard (1997), quando se busca um modelo para interpretar a realidade, na verdade, é apenas para alguns aspectos, considerados como pertinentes, sendo que ele é considerado inadequado, quando se encontra uma falha, um desencontro com aquilo que se observou. Batanero acrescenta:

> uma vez que construímos um modelo matemático para a situação e obtidas as conclusões, a partir do modelo, falta a parte mais importante: compará-las com o comportamento real da situação analisada e decidir se o modelo matemático nos proporciona uma boa descrição da realidade. (BATANERO, 2001, p. 2).[1]

Parzys (1997) salientou a importância de se dar atenção ao papel da articulação entre os campos estatístico e probabilístico, em particular, a distinção entre as noções de freqüência e probabilidade. O autor destaca que diferentes representações, além da linguagem natural e algébrica, como tabelas e gráficos, podem favorecer a apreensão de vários aspectos na exploração e comparação desses conceitos.

A experiência de ensino sobre a distribuição normal, feita por Batanero, Tauber e Sánchez (2001), juntamente com os trabalhos citados indicam o uso da modelagem no ensino das distribuições de probabilidades, a realização de um experimento na prática, a articulação entre os campos probabilístico e estatístico, além de fazer uso de diferentes registros de representação, como tabelas e gráficos que podem ser beneficiados com o uso do computador.

Questões de pesquisa, hipóteses e objetivos

O princípio metodológico que coloca em primeiro plano a questão da Modelagem Matemática é recente e inovador nas pesquisas em Didática da Matemática (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Os trabalhos mencionados sugerem caminhos a serem seguidos que possibilitam o levantamento da seguinte questão de pesquisa inicial: **o uso da Modelagem Matemática é favorável ao ensino e aprendizagem do Modelo de Poisson?**

Considerando que em um processo de modelagem, a organização das etapas é fundamental, admite-se a hipótese de que as orientações de Henry (1997, 2003) possam ser interpretadas e adaptadas para a natureza deste estudo; assim sendo, a seguinte

[1] Tradução nossa

questão secundária é colocada: **quais etapas são fundamentais num processo de modelagem?**

Em grande parte, as questões enunciadas dependem do ensino implementado; por esse motivo, os seguintes objetivos foram propostos: fazer um levantamento das noções envolvidas no estudo do Modelo de Poisson; elaborar e aplicar uma seqüência didática fundamentada em um processo de modelagem, analisar e avaliar os resultados.

Como algumas pesquisas têm mostrado que o uso de um aplicativo pode favorecer o interesse, exploração e compreensão do modelo, admite-se a hipótese de que o uso do computador possa contribuir para o desenvolvimento do processo de modelagem.

Fundamentos do estudo

A preocupação em elaborar uma seqüência de ensino que pudesse favorecer o ensino e a aprendizagem dos modelos probabilísticos com significado (no sentido usual do termo) e avaliar o processo de modelagem, motivou a busca de elementos teóricos para seu embasamento. Particularmente, o trabalho de Batanero, Tauber e Sánchez (2001) sugeriu o uso da Teoria das Funções Semióticas (GODINO, 2003), essencialmente, a criação de categorias de significado de objetos matemáticos (situações-problema, técnicas, conceitos, proposições, argumentações, teorias, etc.), identificados em caráter institucional e/ou pessoal.

Nessa teoria, o termo significado é concebido como o conteúdo associado a uma expressão, mas não é, necessariamente, uma entidade mental, mas sim, aquilo ao qual se refere um sujeito (pessoa ou instituição) em um dado momento e em dadas circunstâncias. O autor define *objeto institucional*, como emergente do sistema de práticas sociais relacionadas a determinados problemas, sofrendo transformações e ampliando o campo de problemas a ele associado e *objeto pessoal* como emergente do sistema de práticas pessoais significativas associadas a um campo de problemas, cuja emergência é progressiva ao longo da história do sujeito, como conseqüência da experiência e da aprendizagem (GODINO, 2003, p. 97-99).

Dessa forma, o significado dos objetos matemáticos é relacionado com as práticas de um sujeito com os objetos, ou ao seio das instituições, possibilitando que se fale em significado de um objeto pessoal e institucional (GODINO, 2003, p. 101). No trabalho matemático, costuma-se usar um objeto para a representação de outros, em geral abstratos, estabelecendo-se uma correspondência, poucas vezes explícita, entre o representante e o representado; palavras, símbolos, gráficos e objetos físicos desempenham o papel de representar um objeto, ou um de seus aspectos. A interpretação do conhecimento e da compreensão de um objeto por parte de um sujeito (pessoa ou instituição) é avaliada, nessa teoria, em termos das relações que o sujeito pode estabelecer em determinadas situações.

Na Teoria das Funções Semióticas, o problema da compreensão está intimamente ligado a como se concebe o próprio conhecimento; a compreensão é considerada como um processo progressivo e é interpretada como correspondência entre significados pessoais e institucionais. A *competência* e a *compreensão* põem em jogo o conhecimento; diz-se que um sujeito é *competente* para realizar uma tarefa, quando é capaz de aplicar corretamente uma técnica; diz-se que um sujeito *compreende* a técnica que permite realizar a tarefa, quando ele conhece, porque a dita técnica é adequada, seu campo de validade e as relações com outras técnicas.

Para descrever o conhecimento, Godino (2003) considera as dependências entre as partes de um texto, em que uma parte (expressão) designa outra (conteúdo). A *expressão* e o *conteúdo* podem ser constituídos de um ou vários tipos de entidades que o autor categoriza em seis elementos de significado:

SITUAÇÕES: no sentido amplo, refere-se a problemas matemáticos ou extra-matemáticos.

LINGUAGEM: designa todo tipo de representação, inclusive as matemáticas.

AÇÕES: do sujeito diante de tarefas matemáticas.

CONCEITOS: na atividade matemática, o sujeito apóia-se em noções para resolver problemas, que contribuem para a emergência de diferentes conceitos, os quais irão caracterizar o novo objeto que surge como resultado de ações.

PROPRIEDADES: cada propriedade de um objeto matemático relaciona-o a outros e contribui para o crescimento do significado do objeto em questão.

ARGUMENTOS: a fim de justificar, explicar e comprovar as soluções dos problemas, ações e objetos são interligados, mediante argumentações e raciocínios.

Para cada componente de significado descrita, o autor considera cinco facetas do conhecimento; neste estudo, apenas uma delas foi levada em consideração: institucional e pessoal. Dependendo do interesse no estudo, pode-se considerar o sujeito individual (pessoal) ou documentos curriculares, livros texto, explicações do professor (institucional), ou ainda, a interação em ambos. Godino (2003) distingue os significados <u>institucionais</u> em: *de referência* (textos matemáticos, orientações curriculares, considerações de especialistas, conhecimento pessoal do professor), *pretendidos* (baseado nos significados de referência, o professor seleciona, ordena e delimita os que serão desenvolvidos), *implementados* (que têm lugar na sala de aula) e *avaliados* (que constam das provas, tarefas e observações) e os pessoais em: *global* (conteúdos que os alunos são capazes de manifestar), *declarados* (tudo que é expresso nas avaliações) e *logrados* (aqueles declarados, que estão em acordo ao que foi institucionalizado).

A categorização dos elementos de significado do objeto Modelo de Poisson foi considerada neste estudo; inicialmente, foi feita uma análise de seis livros didáticos utilizados em cursos universitários, a fim de determinar os elementos de significado institucional de referência, que foram considerados na seleção daqueles que seriam pretendidos em cada etapa do processo. Ao final de cada sessão os elementos de significado pessoal, global e declarado, foram comparados com os institucionais, implementados e avaliados, a fim de identificar aqueles logrados e os erros de aprendizagem, avaliando, dessa forma, o processo de modelagem desenvolvido.

Para Bienbengut e Hein (2000), a construção de modelos matemáticos surgiu durante o Renascimento em linguagem e tratamentos matemáticos de idéias da Física. Já na Educação, ela é recente, podendo ser usada como método de pesquisa e estratégia de ensino e de aprendizagem (BASSANEZI, 2002).

Sob o ponto de vista da Matemática Aplicada, a modelagem é entendida, como um processo que tem origem na realidade e visa à construção de um modelo matemático, sendo descrito, por vários autores, em etapas seqüenciais, que diferem na esquematização e no detalhamento das etapas. Nossa hipótese é que as etapas de Henry (Quadro 1) podem ser interpretadas para os propósitos deste estudo.

Quadro 1. Etapas do processo de modelagem matemática

ETAPA	OBJETO DE AÇÃO
Realidade	Estudo de um fenômeno real ou de um processo experimental.
Modelo pseudo-concreto	Situação genérica, descontextualizada, abstratamente portadora de propriedades do objeto de estudo. Hipóteses do Modelo: em geral implícitas, porém explícitas para o contexto particular.
Modelo Matemático	Conjunto de equações ou de formalizações matemáticas representando as propriedades do Modelo e as hipóteses admitidas.
Estudo Matemático	Propriedades do Modelo Matemático, decorrentes das hipóteses e das teorias matemáticas usadas.
Confrontação Modelo-Realidade	Formulação em termos correntes dos resultados obtidos. Recontextualização. Confrontação do Modelo completado por esses resultados com as informações acessíveis da realidade.
Generalização e previsões	Extensão da validade do Modelo a outras situações análogas, condições e generalizações. Previsão dos resultados nas novas situações.

Fonte: Henry (1997, p. 81-83).[2]

Procedimentos Metodológicos

[2] Tradução nossa

Um experimento piloto foi realizado em 2003, com o intuito de fazer os acertos necessários. Em 2004, foi realizada a fase experimental, na qual participaram, voluntariamente, dezesseis alunos do segundo ano de graduação de uma instituição particular de Ensino Superior, sendo oito do curso de Engenharia Elétrica e oito de Ciência da Computação. A opção por oito duplas deveu-se ao número de contadores Geiger-Mueller (quatro) disponíveis no Laboratório de Física Nuclear.

O objetivo, ao adotar metade do número de alunos de cada curso, foi montar as duplas de trabalho com um aluno de cada, pretendendo-se favorecer a troca de conhecimentos das duas formações.

A fase experimental foi desenvolvida na instituição de ensino em que os participantes estudavam e constou de seis etapas, em ambientes que se alternaram entre: Laboratório de Física Nuclear, Laboratório de Informática e sala de aula usual. Os encontros, cada um com duas horas de duração, foram organizados de acordo com as etapas de modelagem e os aspectos principais são descritos no que se segue. Observamos que, ao final de cada encontro, os alunos responderam algumas questões, cuja correção e discussão coletiva, propiciou que os conteúdos visados fossem institucionalizados e a etapa avaliada, em termos de objetivos atingidos.

<u>Primeira etapa</u>: (realidade – Laboratório de Física Nuclear) os alunos receberam um texto sobre radiação, com o intuito de situá-los no contexto dos experimentos: contagens de partículas radioativas emitidas, com o auxílio do contador Geiger-Mueller. Com base no texto, os alunos elaboraram e colocaram em ação um protocolo experimental; quatro experimentos foram realizados, com dois tipos de material radioativo e três intervalos de tempo, a fim de favorecer a conjectura de propriedades, referentes aos Postulados de Poisson.

<u>Segunda etapa</u>: (modelo pseudo-concreto – Laboratório de Informática) os alunos fizeram um estudo descritivo dos valores coletados, com o auxílio de um aplicativo, incluindo tabelas, gráficos e medidas de tendência central e dispersão, visando o levantamento de conjecturas.

<u>Terceira etapa</u>: (modelo matemático – sala de aula usual) baseando-se nas fases anteriores, professor e alunos, construíram o modelo matemático (no caso, o Modelo de Poisson). Essa construção foi detalhada passo a passo e não usou a aproximação binomial.

<u>Quarta etapa</u>: (estudo matemático – Laboratório de Informática) com o uso do mesmo aplicativo os alunos fizeram a exploração do modelo, valendo-se de diferentes valores

do parâmetro e distintos registros de representação, a fim de validar conjecturas e generalizá-las.

Quinta etapa: (confrontação modelo-realidade – Laboratório de Informática) os alunos compararam os valores obtidos em um dos experimentos realizados com aqueles correspondentes ao modelo teórico construído, adotando-se como parâmetro o valor inferido experimentalmente. O aplicativo utilizado foi o mesmo e a comparação foi feita por meio de tabela, gráfico e teste qui-quadrado de aderência.

Sexta etapa: (generalização e previsões – sala de aula usual) os alunos resolveram uma série de situações associadas a outras áreas do conhecimento, como aquelas encontradas em livros didáticos, em que o Modelo de Poisson foi considerado adequado, com base nos Postulados de Poisson. Além disso, um estudo sobre a aproximação Poisson ao modelo Binomial fez parte deste encontro.

Um último encontro foi direcionado à aplicação de um teste final, individual e sem consulta a material didático ou apontamentos, apresentado a seguir.

1. Assinale todas as alternativas com as quais você concorda.

Construir um Modelo Matemático associado a um experimento aleatório

a) é elaborar uma ou mais equações matemáticas que possibilitem o estudo de uma característica que se queira observar.

b) serve para fazer previsões a respeito de valores futuros.

c) proporciona uma aproximação aos valores observados em uma experiência.

d) consiste em determinar equações matemáticas que possibilitem a determinação de valores iguais aos obtidos experimentalmente.

e) exige que algumas hipóteses sejam admitidas, a fim de se poder determiná-lo.

f) é obter uma representação abstrata de algum aspecto da realidade observada.

2. Assinale todas as alternativas com as quais você concorda.

Para definir completamente uma distribuição de Poisson, é suficiente conhecer:

a) a moda; **b)** a média; **c)** a mediana; **d)** a variância; **e)** o desvio padrão

3. Se uma variável aleatória W_t tem distribuição de Poisson com parâmetro 16, complete as afirmações:

a) W_t pode assumir os valores:

b) O valor esperado (média) de W_t é

c) A variância de W_t é

d) O desvio padrão de W_t é

e) O valor de W_t com probabilidade máxima é próximo de

f) O intervalo que contém os valores de W_t com probabilidades não desprezíveis, é aproximadamente:

g) Os valores de W_t, maiores que a média, têm suas probabilidades cada vez

4. Sendo $W_2 \sim P(8,2)$, complete:

a) $W_1 \sim P(\ )$; **b)** $W_4 \sim P(\ )$; **c)** $E(W_4) =$ __; **d)** Var $(W_4) =$ __; **e)** $P(W_4 = 3) =$ _

f) moda de W_4 é um valor próximo de

5. Complete: na representação por meio de um gráfico de colunas de uma distribuição de probabilidades, os valores da variável aleatória são situados no eixo ... e as respectivas probabilidades no eixo ... .

6. Assinale as situações que podem ser estudadas, usando o Modelo de Poisson:

a) peso dos alunos de uma escola em um determinado período letivo.

b) número de guarda-chuvas que uma loja vende por dia.

c) volume de água em piscinas de tamanho olímpico.

d) número de defeitos em rolos de 5 metros de fita de aço.

e) número de vezes que ocorre a face três, em dez lances de um dado honesto.

f) tempo de espera na fila de um banco.

g) número de acidentes "na rodovia da morte" em um fim de semana.

h) número de vezes que uma pessoa realiza o teste prático, a fim de obter a habilitação.

7. Na fabricação de peças de determinado tecido, aparecem defeitos, ao acaso, na média de dois defeitos a cada $20m^2$. Supondo uma distribuição de Poisson para os defeitos e selecionando, aleatoriamente, recortes de tecido da produção, pede-se:

a) o número médio de defeitos em $50m^2$;

b) a probabilidade de haver exatamente quatro defeitos, em $50m^2$;

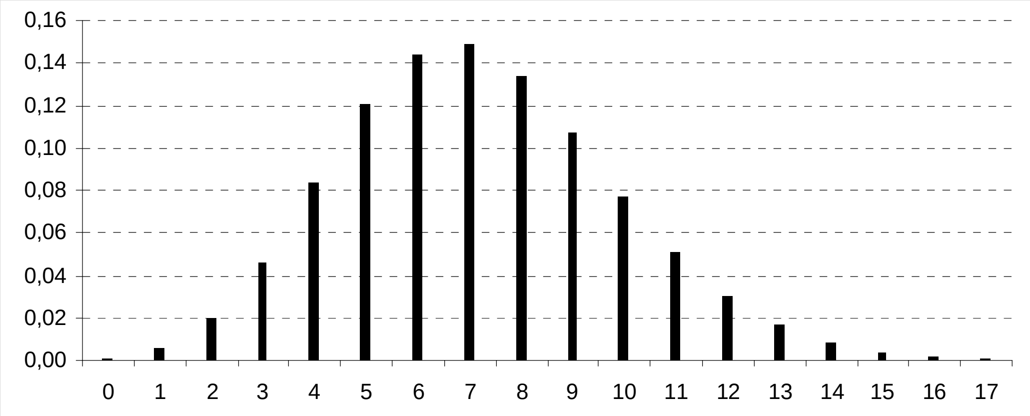
c) a probabilidade de haver pelo menos dois defeitos em $10m^2$;

d) o número mais provável de defeitos em $10m^2$;

e) aproximadamente, o número máximo e o número mínimo de defeitos em $10m^2$;

f) a probabilidade de haver mais de quinze defeitos em $10m^2$.

8. Estudando o número de erros nas páginas de determinado jornal concluiu-se que se pode considerar que a variável aleatória W_{10}, número de erros em dez páginas do jornal, escolhidas ao acaso, tem distribuição de Poisson, representada no gráfico a seguir:



Complete:

a) no eixo das abscissas são representados

b) no eixo das ordenadas são representados

c) o número médio de erros em dez páginas é aproximadamente

d) W_{10} ~ P(...).

9. O departamento de recursos humanos de uma empresa entrevista, em média, 3,4 candidatos a emprego por hora. Admitindo que o número de entrevistas segue uma distribuição de Poisson, pede-se:

a) a probabilidade de mais de dois candidatos serem entrevistados em meia hora;

b) número médio de entrevistas em 45 minutos.

10. Em um curso universitário sabe-se que apenas 2% dos alunos são do sexo feminino. Escolhendo-se, ao acaso, 30 estudantes, qual a probabilidade de se obter exatamente sete do sexo feminino? (use a distribuição de Poisson para obter um valor aproximado).

11. Digite os valores que representam números de telefonemas recebidos por uma central telefônica a cada minuto na planilha, e use o teste qui-quadrado, com um nível de 5%, para avaliar a aderência dos valores observados ao Modelo de Poisson; escreva sua conclusão. Lembrete: $\chi^2 = \sum_i \frac{(F_{oi} - F_{ei})^2}{F_{ei}}$.

Número de telefonemas:	0	1	2	3	4
Freqüência	25	37	21	12	5

Análise dos resultados

Num primeiro momento, apresentamos alguns comentários a respeito das etapas consideradas no processo de modelagem desenvolvido.

Primeira etapa: apesar da experiência escolhida referir-se a uma área do conhecimento que os alunos não tinham domínio, ainda, pôde-se observar que esta foi importante para motivar e despertar o interesse, além de contribuir para que as noções de média, aleatório e independência pudessem ser ampliadas e algumas de suas características identificadas pela maioria dos alunos, mas não de todos, evidenciando a complexidade desses conceitos já salientada por outros pesquisadores. Observa-se, portanto, que não só a realização efetiva do experimento é fundamental no processo, como concluiu Coutinho (2001), mas também sugere que o experimento a ser realizado deve ser cuidadosamente selecionado, tendo em vista os sujeitos visados no estudo.

Segunda etapa: a exploração realizada na planilha atingiu o objetivo de reafirmar e complementar a primeira etapa, garantindo a explicitação, pelas duplas, da dependência do material radioativo e do intervalo de tempo no número de partículas emitidas. A noção de valores aleatórios foi ampliada, em relação ao explicitado na primeira etapa. Nessa etapa de modelagem, pode-se concluir que o trabalho de exploração dos valores obtidos experimentalmente, em particular, a representação gráfica com auxílio de um aplicativo, mostrou-se favorável à emergência de conjecturas sobre o modelo, no que tange ao contexto particular dos experimentos realizados; vale mencionar que o uso do computador agilizou a obtenção das representações pretendidas, mas os alunos precisam conhecer e saber manipular o aplicativo, antes da sua utilização, para não comprometer os objetivos visados.

Terceira etapa: a análise desta etapa evidenciou a complexidade e a necessidade de esclarecimentos dos conceitos matemáticos e probabilísticos envolvidos, além que todas as passagens intermediárias devem ser explicitadas e, mesmo que se manipule símbolos, é importante que os alunos traduzam as expressões a fim de enriquecê-las e reforçar o sentido atribuído a estes símbolos. (GRUPO AZARQUIEL, 1993, p. 41). A construção apresentada favoreceu a apreensão das Hipóteses de Poisson e sua importância, mas não possibilitou a compreensão do parâmetro do modelo. Acrescenta-se, ainda, o interesse explícito por aspectos históricos relacionados ao estudo, que puderam ser agregados ao desenvolvimento dessa etapa.

Quarta etapa: Nos comentários individuais, o trabalho no Laboratório de Informática foi valorizado por todos os alunos, como sendo um instrumento que favorece a aprendizagem, como também o trabalho em dupla, sendo salientadas as vantagens do debate sobre as dúvidas, maior confiança nas conclusões e mais agilidade na resolução das situações propostas. Alguns sujeitos explicitaram que as representações gráficas facilitaram a visualização de resultados e que essa atividade trouxe esclarecimentos sobre o parâmetro do modelo. As variáveis didáticas escolhidas foram favoráveis para a generalização das propriedades do modelo, embora tivéssemos observado algumas dificuldades na manipulação do aplicativo. Essa etapa é, portanto, fundamental para a comparação entre modelo e realidade que se pretende realizar, pois é nela que o aluno começa a dar significado ao parâmetro, além de tornar viável a aproximação entre uma variável que assume valores até infinito e um experimento que nunca assume tais valores.

Quinta etapa: dentre os comentários dos alunos, pode-se destacar: a comparação entre os valores do qui-quadrado calculado e crítico para se obter a conclusão, a visualização gráfica dos valores teóricos e experimentais, a identificação da possibilidade de mau funcionamento do equipamento na realização de um dos experimentos, o trabalho no Laboratório de Informática e as vantagens da professora sanar as dúvidas durante o desenvolvimento das atividades. Quanto ao trabalho em dupla, foram valorizadas: a agilidade na execução das tarefas, as trocas de conhecimentos e as idéias que nunca surgiriam em um trabalho individual. Nessa etapa, ficou evidente que o fato de os alunos já terem feito uso de um aplicativo, não garante que este possa ser usado no desenvolvimento de novas noções.

Sexta etapa: a validade das Hipóteses de Poisson, a coleta de resultados de várias observações e o número médio foram os elementos considerados, pelos alunos, como necessários para a avaliação da aderência do modelo de Poisson às situações propostas. O trabalho desenvolvido favoreceu a ampliação do significado do parâmetro do modelo e o de probabilidade máxima. Por outro lado, o estudo realizado não possibilitou a aproximação pretendida entre os significados institucionais e pessoais, no que se refere aos intervalos de valores da variável com probabilidades não desprezíveis e à aplicação da fórmula de Poisson; há indícios de que a representação adotada não foi favorável. Pôde-se constatar, também, que a interpretação de termos como, *pelo menos dois*, foi dificuldade não superada, reafirmando os achados apontados por Girard (1997).

A análise a seguir, remete-se ao teste final, apesar de os alunos terem sido avaliados, também, ao final de cada etapa de modelagem, cujos comentários já foram apresentados. Na tabela 1 temos a freqüência de respostas a cada item. Em acordo com a Teoria das Funções Semióticas podemos organizar tais respostas em concordâncias e diferenças entre o significado institucional avaliado e o pessoal declarado, que nos permite avaliar muitos dos elementos de significado postos em jogo, revelando competências e compreensões relacionadas aos conhecimentos objetivados em cada etapa do processo de modelagem implementado.

Tabela 1. Freqüência de acertos no teste final

item / questão	a	b	c	d	e	f	g	h
1	10	1	8	3	12	5		
2	14	14	14	12	7			
3	1	11	9	7	6	3	12	
4	12	8	7	6	5	5		
5	14	14						
6	7	10	13	11	3	9	12	10
7	13	10	3	9	6	8		
8	9	11	8	4				
9	3	12						
10	10							

Fonte: teste final da fase experimental da pesquisa em questão, envolvendo 14 alunos.
Nota: nas questões que envolvem a seleção de itens, as freqüências daqueles que não deveriam ser selecionados, correspondem ao número de alunos que não o fizeram.

Situações: um bom número de alunos aplicou corretamente o modelo nos três tipos de situações propostas no teste: aproximação Poisson a um problema Binomial, resolução de problemas com contextos em outras áreas do conhecimento e ajuste a uma distribuição de dados empíricos, como modelo teórico aproximado. Muitos alunos não foram capazes de perceber a utilidade de um modelo matemático nas previsões de dados futuros, talvez, por não ter sido abordada diretamente no ensino.

Linguagem: os alunos reconheceram os termos verbais associados aos conceitos introduzidos. A representação da variável adotada, $W_t \sim P\ (\lambda t)$, provocou dúvidas em sua utilização e interpretação. A pretensão foi diferenciar as variáveis, quando o intervalo é alterado, mas a escolha provocou confusões. Talvez, a representação $W_{\lambda.t} \sim P(\lambda.t)$ possa evitar os erros observados. Além disso, a interpretação de expressões do tipo *pelo menos* foi motivo de muitas falhas; apesar da nossa precaução em relação a este aspecto, o estudo não foi suficiente para os alunos superarem essa dificuldade.

Ações: não fez parte do teste.

Conceitos: dentre os conceitos avaliados, pode-se destacar, como fazendo parte do conhecimento explicitado: a média do Modelo de Poisson, o parâmetro e as probabilidades desprezíveis e máxima. Os alunos foram capazes de identificar o valor da variável com probabilidade máxima mas, quando a noção foi substituída pelo conceito de moda, a porcentagem de erro foi bem maior. Apesar de os alunos já terem feito uso do teste qui-quadrado, este foi motivo de muitos questionamentos. Tal fato nos alerta para a necessidade de se rever os conceitos, em situações de resolução de problemas, para garantir que sejam conhecimentos disponíveis.

Propriedades: podem ser considerados como conhecimento adquirido, a suficiência da média na identificação do Modelo de Poisson, a coincidência da média, variância e parâmetro, a linearidade da média nas situações de tempo, comprimento e espaço e o decrescimento das probabilidades conforme os valores da variável se distanciam da média. Apesar da exploração de valores da variável, com probabilidade desprezível, muitos alunos não foram capazes de identificar que a variável com distribuição de Poisson assume valores de zero a infinito, limitando-os ao valor do parâmetro. Talvez, o estudo, que se valeu da representação gráfica, em que a visualização é limitada, tenha influenciado as respostas. O intervalo de valores da variável com probabilidade não desprezível foi definido de modo incorreto, por vários alunos, indicando que o trabalho desenvolvido não foi suficiente para que este fizesse parte do conhecimento de tais sujeitos.

Argumentos: embora a justificativa das respostas não tenha sido uma exigência do teste final, pôde-se constatar na última questão a dificuldade de os alunos expressarem suas idéias; o vocabulário foi limitado e as frases elaboradas não traduziram adequadamente as idéias subjacentes.

A relação entre os objetivos de cada questão, as concordâncias e diferenças entre os elementos de significado institucional e pessoal apresentados e as etapas de modelagem adotadas neste estudo, nos permitem dizer que há indícios de que o uso da modelagem pode ser favorável ao ensino e aprendizagem de modelos probabilísticos e que a interpretação dada às etapas corroborou para que os objetivos fossem atingidos. A aproximação entre os elementos de significado pessoal logrado, explicitados pelos sujeitos desta pesquisa, e aqueles institucionais de referência, obtidos nos livros didáticos, nos convida a dar continuidade em nosso estudo sobre o ensino e aprendizagem de modelos probabilísticos.

Conclusões

Neste trabalho, descrevemos um estudo sobre o ensino e aprendizagem do Modelo de Poisson, em que a Modelagem Matemática norteou a elaboração da seqüência de ensino, tendo a Teoria das Funções Semióticas como fundamento.

Nossa análise da metodologia de ensino desenvolvida e a comparação com aquela que é apresentada nos livros didáticos, sob a ótica do marco teórico adotado, revelam a complexidade do significado e compreensão do conceito de Modelo de Poisson, que não se limita à aplicação de fórmulas, mas inclui um sistema de elementos que os alunos devem reconhecer e serem capazes de relacionar para resolver os problemas que são propostos.

Esta pesquisa permite concluir que o uso da Modelagem Matemática pode favorecer o ensino e a aprendizagem do Modelo de Poisson por possibilitar que vários de seus elementos de significado sejam colocados em jogo, podendo favorecer o desenvolvimento de competências na obtenção e aplicação de técnicas e a compreensão do objeto em estudo, como um processo progressivo, mental, social e interativo. A análise dos resultados obtidos ao final de cada etapa do processo de modelagem e no teste final sustenta a afirmação de que todas as seis etapas foram fundamentais, para que muitos dos elementos considerados no estudo pudessem fazer parte do conhecimento adquirido pelos sujeitos participantes; dentre eles, destacam-se:

- determinar o parâmetro do modelo baseado em valores obtidos experimentalmente ou de sitações-problema;
- identificar o valor da variável com probabilidade máxima;
- determinar as freqüências esperadas sob a hipótese do modelo ser de Poisson;
- calcular o qui-quadrado crítico e observado e compará-los, a fim de identificar se o Modelo de Poisson é ou não inadequado para representar a realidade observada;
- identificar situações em que o Modelo de Poisson possa ser utilizado;
- identificar características na construção de um modelo matemático;
- determinar probabilidades de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson;
- identificar a coincidência entre média, variância e parâmetro de uma variável com distribuição de Poisson.

Essas aquisições podem ter sido favorecidas pelas escolhas feitas nesta pesquisa, dentre as quais foram salientadas pelos próprios sujeitos participantes: a discussão e correção de cada tarefa ao seu final, o esclarecimento das dúvidas durante o processo, o detalhamento nas demonstrações formais, a mudança de ambiente e o trabalho desenvolvido nos Laboratórios de Física Nuclear e de Informática e, finalmente, o trabalho em dupla.

O estudo detectou, também, que alguns elementos de significado proporcionaram maior dificuldade de compreensão; dentre eles, pode-se destacar:

- identificar os elementos na representação simbólica utilizada.
- interpretar expressões do tipo *pelo menos dois*;
- expressar, adequadamente, a conclusão de um teste de hipótese;
- definir e determinar o intervalo de valores da variável com probabilidades não desprezíveis;
- usar opções do menu da planilha eletrônica.

Na pesquisa realizada, não foi possível encontrar uma forma de construir o Modelo de Poisson, sem apelar para a solução de equações diferenciais lineares homogêneas e não homogêneas de primeira ordem, como pretendido. Mas, a experiência realizada e o encaminhamento que foi feito mostraram que, com alguns conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral, os alunos foram capazes de acompanhar o desenvolvimento realizado.

Quanto ao tempo didático dispensado no processo apresentado, este pode ser minimizado, tendo em vista que, em um curso regular, pode-se preparar os alunos em vários aspectos antecipadamente como, por exemplo, o uso das mesmas etapas em modelos menos complexos, como o Binomial, por exemplo, e atividades extra-classe, que não foi opção adotada neste estudo.

O trabalho descrito merece novas investigações, mas, acreditamos ser ele uma valiosa informação inicial, devido à falta de pesquisas sobre o tema, com fase experimental. As dificuldades, identificadas neste estudo e que podem ser extrapoladas para outros modelos probabilísticos, merecem nossa atenção em futuras investigações. Dentre as que foram analisadas, destacamos: interpretação de termos do tipo *pelo menos*, representação simbólica, as limitações da representação gráfica, aprendizagem simultânea do aplicativo e conteúdo, síntese na comparação entre valores práticos e teóricos.

Nossa pesquisa sugere que é possível desenvolver uma seqüência fundamentada na modelagem matemática que possibilite a aprendizagem de noções básicas sobre os modelos probabilísticos, indicando etapas a serem seguidas. Como este estudo referiu-se a um número limitado de sujeitos, os resultados aqui apresentados servem apenas de indicadores e não devem ser generalizados.

Referências

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto, 2002.

BATANERO, C. Aleatoriedad, modelización, simulación. In actas: *X Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, Zaragoza: ICE, 2001, p. 119-130. Disponível em: <http:/www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>. Acesso em: 25 mar. 2002.

BATANERO, C.; TAUBER, L. M.; SÁNCHEZ, V. Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Quadrante*, v. 10, n. 1, p. 59-92, 2001. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>. Acesso em: 10 ago. 2004.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999.

COUTINHO, C. *Introduction aux situations aléatoires dès le collège: de la modélisation à la situation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique cabri-géomètre II*. 2001. 330f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

GIRARD, J. C. Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 215-223.

GODINO, J. D. *Teoría de las funciones semióticas: um enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. 2003. 318f. Monografia (Cátedra da Universidade de Didática da Matemática)-Universidade de Granada, Espanha, 2003. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/godino/>. Acesso em: 23 nov. 2004.

GRUPO AZARQUIEL. *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis, 1993.

HENRY, M. Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 77-84.

HENRY, M.; DANTAL, B. Variables aléatoires et lois de probabilité: utilisation de l'analyse em probabilités. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 300-304.

HENRY, M. Étude d'um problème curriculaire: l'enseignement de la statistique. In: Actes de la *12e École d'été de didactique des mathématiques*, France, 2003, CD-ROM.

PARZYS, B. Utilisation des arbres dans l'enseignement des probabilités. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 225-238.