AS VARIÁVEIS VISUAIS NA COORDENAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE INEQUAÇÕES A PARTIR DA COMPARAÇÃO DE FUNÇÕES

MARIANI, Rita de Cássia Pistóia – URI Santiago/RS – rcpmariani@urisantiago.br
SILVA, Benedito Antonio da – PUC/SP – benedito@pucsp.br
GT: Educação Matemática / n. 19
Agência Financiadora: Não contou com financiamento

APRESENTAÇÃO

Este trabalho originou-se de uma das tarefas que integram uma pesquisa realizada com finalidade de investigar os conhecimentos revelados por alunos recém ingressados no Ensino Superior ao se depararem com questões trabalhadas na disciplina de Cálculo Diferencial Integral.

Algumas das questões tratadas nesta disciplina já tiveram o seu início na Educação Básica, no entanto, o enfoque, em geral, privilegiado é aquele que envolve algoritmos e técnicas padronizadas, o que pode mascarar as propriedades inerentes aos conteúdos matemáticos envolvidos.

A pesquisa fundamentou-se no desenvolvimento e análise de tarefas conduzidas a partir da representação gráfica de funções organizadas com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval podem "promover" debate e argumentações de alunos ingressantes no Ensino Superior em um Curso de Licenciatura em Matemática.

Segundo Duval (2003) os processos de aprendizagem da Matemática precisam, necessariamente levar em consideração as exigências científicas próprias dos conteúdos matemáticos em questão e, ao mesmo tempo, o funcionamento cognitivo do pensamento humano.

Para o autor, caracterizar a atividade matemática através da complexidade epistemológica do desenvolvimento histórico dos conceitos envolvidos não é suficiente para se determinar as dificuldades, os fracassos e os bloqueios que os alunos enfrentam durante a aquisição do conhecimento matemático, pois o ensino desta disciplina, deve, antes de tudo, possibilitar o desenvolvimento geral de capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

De acordo com os sistemas sociais e históricos de representação utilizados no mundo a principal forma de linguagem é a língua que pode ser expressa na forma verbal, oral ou escrita. Assim, a linguagem transformou-se no conjunto de todas as formas sociais de comunicação, de significação e, conseqüentemente de produção de sentido.

A Matemática é a ciência que usa de representações para ser compreendida e desenvolvida, pois os objetos matemáticos são abstratos, diferentemente da maioria dos objetos presentes nas outras áreas como a Biologia, a Física, a Geografia que podem ser observados diretamente ou através de alguns instrumentos, desta forma, a única maneira de se acessarem os objetos matemáticos é utilizando suas representações. Conforme Damn (1999, p. 137) " [..] os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação.

Duval (2003) aponta que *"a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos"* (p. 13), mas nas duas características seguintes:

- A importância primordial das representações semióticas: A história da Matemática mostra que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Esse desenvolvimento se deve a duas razões fundamentais: as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado. E ainda, há o fato de que os objetos matemáticos não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos, por isso, é imprescindível, a mobilização de um sistema de representação para os designar.
- A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática: Existem tipos distintos de registros, entre eles os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural. Por exemplo, uma função quadrática pode ser representada por $y= x^2$, pelo traçado de seu gráfico, por uma tabela contendo os valores das varáveis x e y, ...

O autor leva em consideração os sistemas que produzem estas representações, pois ele assume que o conhecimento matemático se dá por meio da atividade representacional. Estabelece três aproximações para este conceito: representações mentais e subjetivas, internas ou computacionais e semióticas:

As representações mentais e subjetivas são representações internas e conscientes ocorrendo no nível do pensamento e referem-se às crenças, idéias, explicações, convicções espontâneas do sujeito sobre os fenômenos físicos;

As representações internas ou computacionais foram analisadas junto com as teorias que privilegiam o tratamento a partir de meados dos anos cinqüenta e, segundo Damn (1999, p.139): *São representações internas e não conscientes do sujeito. Ou seja, o sujeito acaba executando tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização (por exemplo, os algoritmos computacionais, ou mesmo os algoritmos das operações).*

As representações semióticas são externas e conscientes do sujeito e contemplam concomitantemente, o caráter semiótico das representações e a existência de vários registros de representação e são relativas a um sistema particular de signos como a língua natural, a escrita algébrica, os gráficos cartesianos, as figuras de um objeto matemático.

Duval (1993) afirma que: *(...) as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.* (p.39)

As representações mentais, computacionais e semióticas possuem função de comunicação, no entanto, se diferenciam de acordo com as demais funções que exercem. Enquanto que as representações mentais têm função de objetivação, as representações computacionais estão relacionadas com o tratamento da informação e as representações semióticas possuem, uma função de objetivação e uma função de expressão além de possibilitarem um tratamento intencional.

Surge então a necessidade de se diferenciar, sob o ponto de vista cognitivo, um registro de um código, apesar de os dois desempenharem a função de comunicação o registro se caracteriza por possuir outras funções, quais sejam, objetivação e tratamento da informação.

O termo "registro" foi empregado, inicialmente, por Descartes no livro I de Geometria em 1637, para distinguir a escrita algébrica das curvas e suas representações figurativas. Entretanto, em uma perspectiva de aquisição de conhecimento, sob o ponto de vista dos sistemas produtores de representação e não do lado do objeto nem todo sistema de signos existentes constitui um registro.

Em um sistema semiótico um registro de representação tem as funções de comunicação, de objetivação e de tratamento enquanto que um código não apresenta a possibilidade de tratamento. Por exemplo, as placas de trânsito das estradas são significantes (triângulo $\rightarrow$ perigo, vermelho $\rightarrow$ proibição, ...) e não podem se caracterizar como um registro no sentido de Duval, uma vez que não há a possibilidade de transformar um elemento em outro, diferentemente do que ocorre com todo elemento de um registro, que pode se transformar em outra representação no mesmo registro (tratamento) ou em uma representação de outro registro (conversão).

Como a atividade matemática acontece, segundo o autor, por meio da mobilização de vários registros de representação, simultaneamente ou alternativamente torna-se necessário efetuar transformações de representações semióticas com vistas à elaboração de novas representações, sendo possível, mudar de registro de representação através de uma atividade de conversão, bem como, efetuar tratamento em um mesmo registro. Estes dois tipos de transformações de representações semióticas: o tratamento e a conversão são diferenciados quando buscamos analisar a atividade matemática numa perspectiva de aprendizagem (e de ensino) e não em uma perspectiva de pesquisa matemática.

O tratamento depende das possibilidades de funcionamento representacional de um registro e ocorre quando um elemento de representação é transformado em outro que permanece dentro do mesmo registro. Na maioria das vezes recorre-se aos tratamentos nos procedimentos de justificação como, por exemplo, quando se resolve uma inequação através da utilização de um algoritmo. Ou ainda, no cálculo de um limite de uma função racional com x tendendo a uma raiz do numerador e do denominador acarretando em uma indeterminação do tipo “0/0” onde, por exemplo, se pode recorrer à fatoração dos polinômios envolvidos e eliminar os fatores comuns levantando assim, a indeterminação inicial.

Já a conversão, consiste em uma mudança entre dois registros de representação, conservando como referência o mesmo objeto. Por exemplo, representar graficamente o conjunto solução de uma inequação, obtido, inicialmente no registro algébrico.

Segundo Duval (2003, p. 16):

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. [...] Mas do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Quaisquer que sejam os registros considerados, uma atividade de conversão é irredutível a um tratamento uma vez que ela é mais complexa e mais evoluída do que as operações de tratamento, pois apresenta duas características próprias: a primeira se refere ao fato de ser orientada, isto é, quando se tem uma conversão é necessário estabelecer, precisamente, qual é o registro de partida e qual é o registro de chegada. A segunda característica está relacionada ao fato da conversão ser congruente ou não-congruente, sendo que ocorre a:

- Congruência quando a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão torna-se trivial e, pode ser considerada como uma situação próxima de simples codificação;
- Não-Congruência quando a representação terminal não transparece claramente na representação de saída.

Duval apontou que existem muitos fatores que determinam o caráter congruente ou não-congruente de uma conversão sendo que, estes fatores estão relacionados com a semântica das unidades de significado, a unicidade da semântica terminal e a conservação da ordem das unidades.

Por exemplo, quando é solicitado o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa, isto é, $(y>x)$. Tem-se, neste caso, uma conversão congruente, pois são satisfeitas as três condições propostas acima.

Por outro lado, quando se quer determinar o conjunto de pontos (x,y) tais que os produtos das abscissas e das ordenadas é maior que zero $(xy>0)$. Tem-se um exemplo de uma conversão não-congruente uma vez que não satisfaz a correspondência semântica das unidades de significado, a unicidade semântica terminal nem a conservação da ordem das unidades.

Duas representações de um objeto não possuem o mesmo conteúdo de um registro para outro para outro. Algumas informações podem ser, em uma conversão, observadas em um registro, enquanto outras são evidenciadas em outro. Quando a conversão é não-congruente, os dois conteúdos são entendidos como dois objetos muito diferentes, como no segundo exemplo dado anteriormente.

Para Duval (2003) a originalidade da atividade matemática está relacionada ao fato de que sejam mobilizados, simultaneamente, ao menos dois registros de representação diferentes para um mesmo objeto bem como, na freqüente mudança de um registro para outro:

> Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. [...] existe como que um "enclausuramento" de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. (DUVAL, 2003, p. 21)

Tal "enclausuramento" além de limitar a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos matemáticos já adquiridos, impede a aquisição de novos.

Quando nos referimos ao estudo dos limites, por exemplo, é desejável que os alunos estabeleçam relações entre o registro gráfico e o numérico. Através da aproximação de valores assumidos pela variável no eixo dos x que acarreta em uma aproximação dos valores assumidos pela função, no eixo dos y, e paralelamente no registro numérico considerar valores da função próximos aos visualizados no registro gráfico para constatar que existe aproximação dos valores à variável.

Como os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática se referem à mobilização de vários registros de representação semiótica e a conversão dessas representações é fundamental observar efetivamente tais fenômenos nas produções dos alunos. O método de pesquisa utilizado para uma análise deste tipo, deve, portanto, estabelecer uma distinção entre tratamentos e conversões, pois eles remetem a domínios cognitivamente diferentes.

Além disso, o autor afirma que é preciso levar em conta a natureza dos registros de representação. A partir da observação destes aspectos, Duval aponta que é possível:

> (...) utilizar a conversão como um instrumento de análise para, por um lado, colocar em evidência as variáveis cognitivas próprias do funcionamento de cada registro e, por outro lado explorar as variações de congruência e não-congruência que podem surgir entre dois registros nas múltiplas representações dos objetos matemáticos. (Duval, 2003, p. 25)

O autor ainda esclarece que a organização e a categorização dos dados coletados deve levar em consideração do ponto de vista cognitivo não somente as produções que possam ser consideradas, matematicamente, corretas ou erradas:

> Do ponto de vista cognitivo os acertos elementares não são determinados por cada item separadamente, mas por

> reagrupamentos de itens, (...) Um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo. Muitos tratamentos estatísticos se baseiam em sucesso nos itens considerados separadamente e não em sucesso em toda uma seqüência de itens; no entanto, este último é o único que possui um significado do ponto de vista de uma análise cognitiva. (Duval, 2003, p.27)

A organização das atividades desenvolvidas em uma pesquisa que leve em consideração a coordenação de registros de representação devem ser constituídas, fundamentalmente, de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão com tarefas de casos de congruência e não-congruência, em ambos os sentidos.

Duval (1988) também afirma ser de grande importância para o processo de ensino e aprendizagem das representações gráficas, a explicitação das variáveis visuais e seus significados simbólicos. Para ele, as variáveis visuais, são aquelas que pertencem, por exemplo, às equações algébricas e que a partir da leitura delas é possível retirar características da representação gráfica.

> (...) a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, interseção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc. (Duval, 2003, p. 17)

Segundo o autor uma expressão algébrica é composta por variáveis visuais que são, os símbolos de: relações (<, >, =,...) de operação ou sinais (+, -,...), de variáveis, de expoentes, de coeficientes e constantes.

Para Duval (2003) é fundamental destacar certas variáveis visuais e sua relação com a expressão algébrica*: Não podemos utilizar corretamente as representações gráficas cartesianas sem descrever explicitamente as variáveis visuais e suas correspondências sistemáticas estabelecidas entre os valores destas variáveis e seu significado na equação algébrica*. (p. 243)

Quando se pretende explorar a conversão entre uma representação algébrica e uma representação gráfica e vice-versa, é preciso que os alunos tenham clareza da maior quantidade possível de variáveis visuais, seus diferentes significados e formas de apresentação, para determinar o que implica cada variável visual da representação algébrica na representação gráfica. Podemos considerar, por exemplo, a relação entre variáveis visuais: da inclinação da reta com o valor do coeficiente angular; do ângulo formado pela reta e o eixo das abscissas com o coeficiente angular; do termo independente com o ponto em que a reta intercepta o eixo dos y. da concavidade da parábola com o coeficiente da variável de maior grau; do maior expoente das funções polinomiais com a representação gráfica de uma reta ou de outro tipo de curva;

O EXPERIMENTO

Antes do experimento, propriamente dito, realizamos um pré-teste em que foi solicitada a resolução da inequação $x^2 - 36 \leq 108$ e, a seguir a conversão do conjunto solução para os registros gráfico, língua natural e numérico.

A partir da utilização de um algoritmo os alunos apresentaram como resposta $x \leq 12$ ou $x \leq \pm 12$. Para representar o conjunto solução no registro gráfico alguns alunos que expressaram $x \leq \pm 12$ apresentaram argumentações incoerentes: alguns destacaram em uma reta os valores menores que 12 outros, utilizando mais de uma reta, destacaram os valores menores que 12 e os valores menores que –12 e, a seguir realizaram a união ou intersecção desses dois conjuntos, aparentemente sem perceber que um dos conjuntos estava contido no outro e, dessa forma, essas operações resultaram em um deles.

Este tipo de atividade não propiciou que os alunos realizassem uma análise dos resultados que foram apresentados, a ponto de algumas duplas apresentaram um conjunto solução diferente num registro daquelas expressos em outro registro, sem confrontar as respostas.

Optamos, então, por elaborarmos e realizarmos de uma tarefa para a resolução de inequações fazendo uso da comparação de funções partindo do registro gráfico para o algébrico com posterior conversão contrária.

Para o desenvolvimento desta tarefa recorremos ao apoio do software *Derive for Windows*, que foi utilizado apenas como uma ferramenta para agilizar a elaboração das representações gráficas a fim de estabelecer a comparação das funções. Por isso, não analisamos as questões ligadas as implicações cognitivas do uso desse recurso.

Com esta abordagem pretendemos analisar os saberes expressos pelos alunos que possivelmente não estão habituados a este tipo de procedimento na Educação Básica, isto é, iniciar o trabalho com a resolução de inequações a partir da comparação de funções.

A tarefa, inspirada em Silva (2002), foi desenvolvida com a 9 duplas de alunos. Cada aluno recebeu uma identificação com uma letra maiúscula do alfabeto como, AlunoA ou AlunosAL, quando nos referimos a dupla.

A tarefa foi iniciada a partir das questões que seguem:

1. Vamos mostrar uma forma geométrica de resolver inequações usando o conceito de função.

a) digite $f_1\ (x) = 3 + x$;

b) digite $f_2\ (x) = -x + 2$;

c) observe as representações gráficas das funções digite f_1 e f_2 simultaneamente.

- Localize, com o cursor, o ponto de intersecção $(x_0\ ,\ y_0)$ das duas retas e escreva suas coordenadas. $x_0=$ $y_0=$
- Localize, com o cursor, os pontos sobre as retas correspondentes à abscissa $x= -1{,}8$
- Apenas observando os gráficos das funções f_1 e f_2, compare f_1 (-1,8) e f_2 (-1,8).
- Localize, com o cursor, os pontos sobre as retas correspondentes à abscissa $x= 0{,}5$.
- Apenas observando os gráficos, compare, f_1 (0,5) e f_2 (0,5).
- Determine todos os valores de x que satisfazem:

a) $3 + x > -x + 2$

b) $3 + x = -x + 2$

c) $3 + x < - x + 2$

2. Resolva as seguintes inequações, utilizando primeiro, o procedimento gráfico com apoio do Derive for Windows e, a seguir as resolva algebricamente comparando e argumentando sobre o porquê das repostas obtidas.

a) $-5 + x < -x + 7$

b) $x^2 - 2x - 3 < 0$

c) $|4x-3| \leq 5$

d) $\frac{7}{x} < \frac{7}{3}$

e) $|x| > 5$

Figura 1. A Tarefa

Nesta tarefa foram propostas conversões que partem do registro gráfico em direção ao algébrico, com intuito de determinar o conjunto solução das inequações propostas.

Inicialmente foram escolhidas duas funções cujos gráficos se interceptam no ponto de abscissa –0,5. O intuito é comparar o comportamento destas funções para valores da variável menores que –0,5 e maiores que –0,5.

Ao digitarem a expressão destas funções no softwarwe os alunos obtiveram:

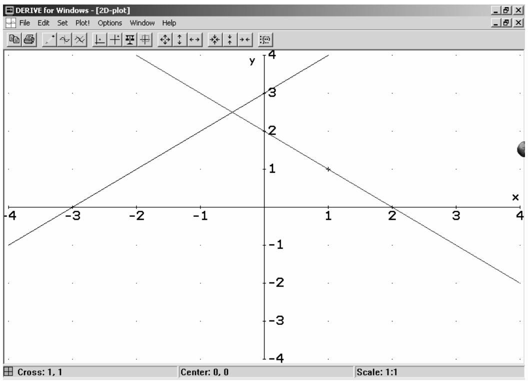


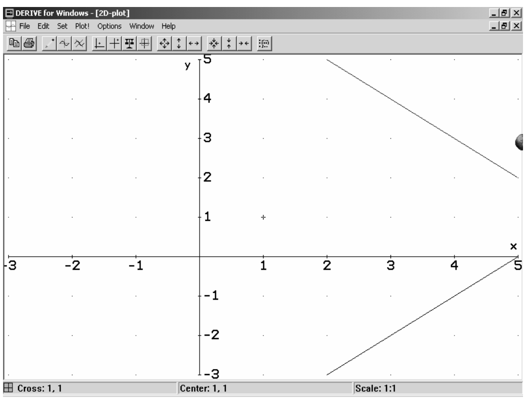
Figura 2. Gráficos das funções *f(x)*= -3+x e *f (x)*= -x+2

Para a realização do primeiro item da tarefa os alunos deveriam a partir dos seus gráficos identificar as funções, f_1 e f_2, localizar os pontos indicados e verificar qual das funções possuía a maior ordenada em cada um desses pontos.

A outra questão da tarefa envolve funções que podem não ser familiares para os alunos que estão ingressando no ensino superior como as funções constante, módulo e racional.

Destacamos inicialmente que apesar de os alunos utilizarem o software gráfico eles podem apresentar dificuldades, pois em geral, não estão habituados a analisar gráficos de funções. Nesta tarefa têm que, concomitantemente, verificar variações das abscissas e das ordenadas dos pontos correspondentes e, além disso, devem se deter nos valores correspondentes às ordenadas do que as abscissas para efetuar a comparação solicitada, observando suas localizações no eixo dos y.

Na primeira desigualdade é explorada a intersecção dos gráficos de duas retas como no item 1. No entanto, esta intersecção ocorre no par ordenado (6,1) que está relativamente distante da origem. Em uma primeira tentativa e com a escala padrão o que aparece na tela do computador são partes de duas retas sem nenhum ponto comum. Para visualizar a intersecção os alunos deverão executar uma alteração na escala dos eixos cartesianos.



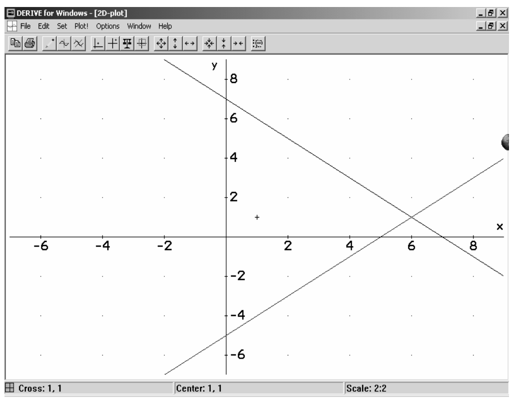


Figura 3. Gráficos das funções *f(x)*= -5 + x e *f (x)*= -x + 7

A seguir exploramos a intersecção de uma parábola com o eixo dos x. Na resolução algébrica os alunos poderiam encontrar as raízes da função quadrática com facilidade, mas estávamos mais interessados em verificar como realizariam a análise da variação de sinal da função.

As inequações que envolviam módulo foram escolhidas para explorar as desigualdades $|x|<a$ e $|x|>a$, $(a>0)$. Em geral, os alunos interpretam corretamente a primeira desigualdade e apresentam dificuldade em relação à segunda. Desejávamos, também, observar se os significado da variável visual módulo era identificada nas duas representações gráfica e algébrica. Além disso, gostaríamos de saber se a variável visual ligada ao símbolo de relação de desigualdade seria observada pois uma se refere a menor ou igual que, $| 4x-3|\leq 5$, e a outra a maior que, $|x|>5$.

A resolução gráfica da inequação $\frac{7}{x}<\frac{7}{3}$, favoreceu a observação do efeito da variável x no denominador de uma função. Além disso, o traçado do gráfico da função $y_1=\frac{7}{x}$ não é familiar aos alunos principalmente por apresentar uma ruptura em x=0 e sua “aproximação” ao eixo dos x para valores próximos de +∞ e -∞.

É possível que os alunos percebam que numericamente os valores desta função crescem indefinidamente quando x está próximo de zero pela sua direita e decrescem indefinidamente quando x está próximo de zero pela esquerda, mas não associem este fenômeno com o fato de o gráfico da função apresentar dois ramos, podendo interpretá-la como sendo duas funções distintas

Pela observação do gráfico, o conjunto solução que torna verdadeira a desigualdade é de] -∞, 0[U]3, +∞[.

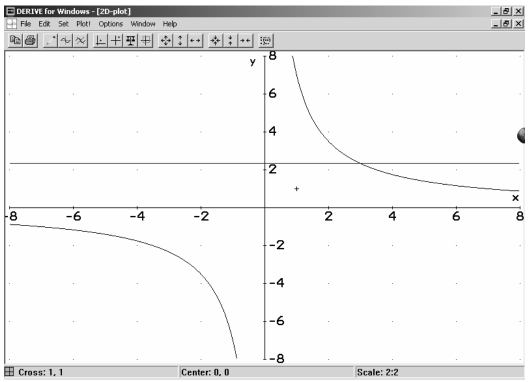


Figura 4. Gráficos das funções $f(x) = \frac{7}{x}$ e $f(x) = \frac{7}{3}$

Durante a resolução algébrica desta inequação é muito comum o aparecimento de um método de resolução que induz o uso da propriedade "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos", obtendo, neste caso, apenas a solução que seria verdadeira se o denominador assumisse valores positivos, isto é, x>3. Quando isto ocorre não é verificada a possibilidade da variável assumir valores negativos.

RESULTADOS

Dos cinco itens propostos na segunda questão as inequações $-5+x < -x+7$; $x^2 -2x-3 < 0$ e $|4x-3| \leq 5$ não apresentaram dificuldades para a grande maioria os alunos tanto na resolução gráfica, na algébrica e nas justificações. Quanto a $\frac{7}{x} < \frac{7}{3}$ todos os alunos acertaram a resolução gráfica porém na resolução algébrica a muitos obtiveram a resposta $x > 3$ e não a confrontaram com aquela obtida graficamente.

Na resolução da inequação $|x| > 5$ os alunos apesar apresentarem a solução gráfica corretamente , realizaram uma interpretação inadequada das variáveis visuais de relação.

Organizamos nossa coleta de dados levando em consideração que: "*a leitura das representações gráficas pressupõe a descrição das variáveis visuais pertencentes às variações correspondentes da escrita algébrica* (Duval, 1988, p.235).

De modo geral, os alunos apresentaram dificuldades em relação à realização deste tipo de tarefa, pois muitos não reconheceram o objeto matemático no registro gráfico expresso pelo software, com a representação algébrica deste mesmo objeto digitado inicialmente.

Logo no início quando os alunos foram solicitados para explicitar o porquê uma função era maior que a outra em um determinado ponto ficou claro que eles percebiam a variável visual da representação algébrica das funções que definiam, a partir do sinal do coeficiente angular a inclinação da reta como uma sendo crescente e a outra decrescente.

No entanto, o entendimento expresso pelos alunos remetia ao fato que uma função crescente é sempre maior que uma função decrescente negando o caráter da variabilidade das funções ou como se refere Duval o símbolo variável. Para este autor, uma das variáveis visuais que deve ser levada em consideração na conversão do registro algébrico para o registro gráfico é o símbolo de variáveis, o que não aconteceu com os alunos que apresentaram este argumento.

Para alguns deles uma função crescente é sempre maior que uma função decrescente independente do intervalo analisado, como ilustração segue o comentário do AlunoB que expressou: *"É claro que a f_1 é maior que a f_2, pois ela é crescente e a outra a –x+2 é decrescente. Então a 3+x vai sempre ser maior que –x+2, não importa aonde"*.

Ao se referir a representação algébrica das funções envolvidas o aluno expressou –x+2 ao invés de y=-x+2 provavelmente devido ao fato de que para se obter o gráfico o software exige, apenas, que se digite exatamente o que o aluno mencionou.

Após questionamentos e debates sobre esta questão o AlunoO explicitou: *"Tem que ver o ponto que elas se cruzam, antes de se cruzarem a 3+x é menor que a –x+2, e depois de elas se cruzarem fica o contrário."*

Este aluno, provavelmente, relacionou mais variáveis visuais do que o anterior e por isso expôs uma argumentação coerente com o registro utilizado.

Nos enunciados das questões estavam presentes muitas variáveis visuais simbólicas no registro algébrico que exigiam uma descrição bastante detalhada. Este fato concorreu para a dificuldade na leitura das representações gráficas. Assim, por exemplo, $f_1(-1,8)$ não se mostrou familiar para a maioria dos alunos em vários aspectos como: a notação f_1 (ou f_2) utilizada para diferençar as duas funções que suscitou questionamentos sobre se esses índices deveriam ser assumidos pela variável x.

A expressão $f(x_0)$ nem sempre demonstrou ser suficientemente descritiva mesmo se o valor fosse um número inteiro positivo. Esta dificuldade se tornou mais "agigantada" quando se tomou x= -1,8 que além de ser um número negativo ainda expresso em $f_1(- 1,8)$ pode ser confundido com um par ordenado e não como um valor da variável x.

Estes aspectos surgiram como obstáculos evidentes nas dificuldades de leitura das representações gráficas e tornaram-se ainda maiores como era de se esperar, ao entrarem em cena além dos símbolos das variáveis também os símbolos de relação quando solicitamos os valores de x que satisfazem: a)$3 + x >- x +2$; b)$3 + x = - x + 2$ e c) $3 + x < - x + 2$;

Além disso, outra dificuldade foi evidenciada quando realizamos a passagem da análise de valores obtidos pontualmente, como por exemplo, f_1 (-1,8) ou $f_1(0,5)$ para todos os valores de um intervalo visando uma apreensão global. Segundo

Duval, para a maioria dos alunos essa coordenação não é efetuada, mesmo no fim do Ensino Médio.

A realização deste primeiro item da tarefa foi um trabalho entre os alunos e a professora com intuito de levantar as questões, as dúvidas de notação, e estabelecer uma passagem da análise pontual para a análise global.

A execução da outra questão se restringiu ao debate entre os componentes da dupla que deveriam obter o gráfico com apoio do software, expressar a resposta obtida e a seguir, solucionar a mesma inequação no registro algébrico, estabelecendo relação entre os dois conjuntos solução.

Percebemos que uma dupla apresentou, inicialmente, dificuldades em reconhecer qual era o gráfico da função $y_1= -5 +x$ e $y_2=-x +7$ pois, realizaram rapidamente a digitação do registro algébrico da função e elaboraram o gráfico.

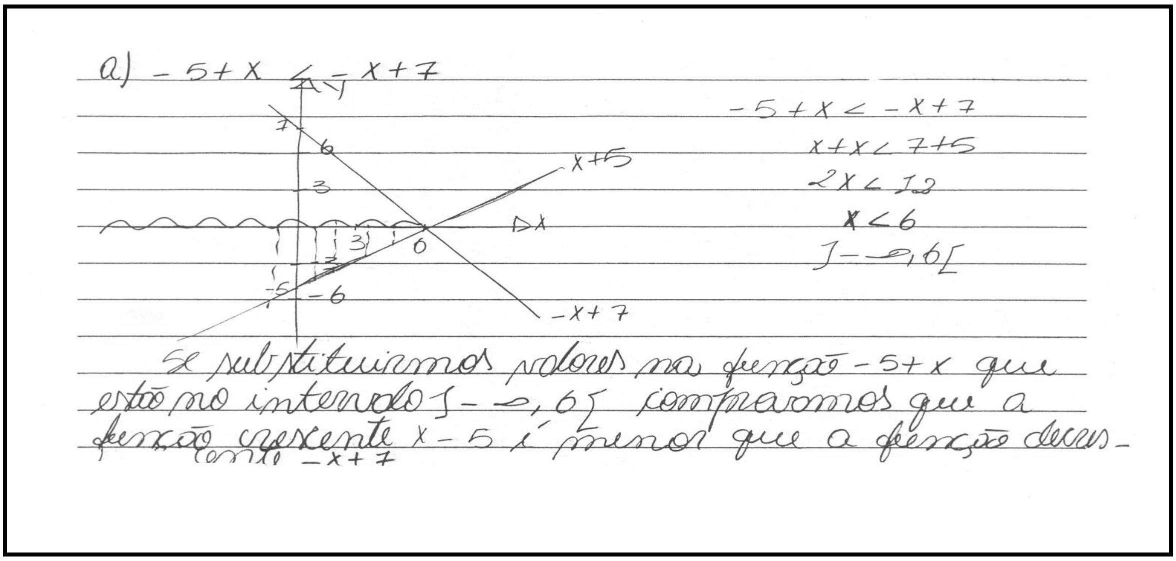
O AlunoJ expressou: *"Professora a gente já digitou as retas e já fez os gráficos e agora? (...) Já sei vamos fazer aquela tabela de valores e daí nos poderemos saber quem é uma e quem é outra."*

Constatamos, mais uma vez, que as variáveis visuais relacionadas ao sinal dos coeficientes e dos termos independentes não foram levadas em consideração, pois a partir delas as duplas poderiam identificar as retas.

Esta etapa de localização pontual de pares ordenados no plano cartesiano para visualizar a passagem de uma reta à sua expressão algébrica constitui, segundo Duval (1988), um obstáculo, em função disso ele propõe uma descrição sistemática das variáveis visuais levando em consideração uma interpretação global das propriedades figurais em que, seria possível o aluno perceber que uma modificação na escrita algébrica implica em uma mudança na representação gráfica de uma função.

Durante a resolução gráfica das inequações os alunos apresentaram diferentes formas de representação: alguns recorrem à notação específica de intervalo, outros destacaram no traçado da curva ou no eixo das abscissas o conjunto solução e outros ainda preferiram a língua natural:

Ao resolver a inequação, $-5 +x < -x +7$, os AlunosRS apresentaram:



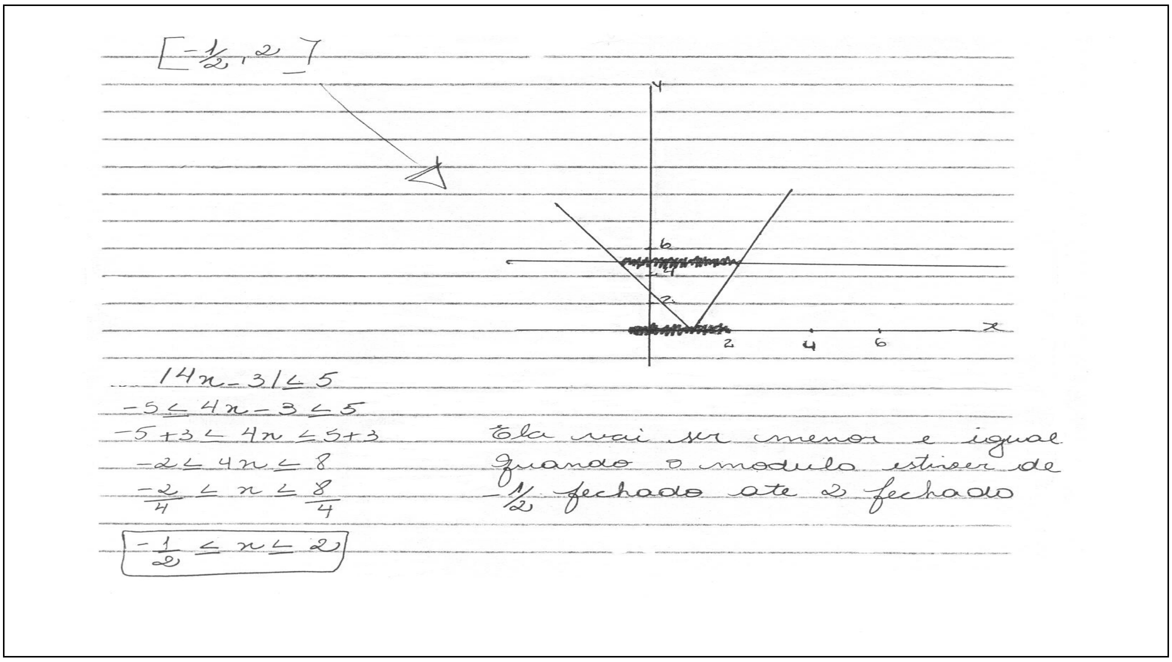
Para Duval, (...) “todo olhar sobre o gráfico implica em uma discriminação entre valores visuais pertinentes e não pertinentes”. Uma modificação, em um valor de variáveis visuais pertinentes “no registro gráfico provoca uma modificação do valor categorial da escrita simbólica da relação” (Duval, 1999, p. 244).

Esta dupla identificou, no esboço do gráfico o conjunto solução da inequação no eixo dos x. Além disso, denotou as expressões algébricas relativas a cada uma das retas, “-5+x” e “-x+7”. Destacou no gráfico os pontos de intersecção de cada reta com o eixo dos y e na argumentação no registro na língua natural recorreu a outros aspectos além do crescimento e decrescimento das funções. Esses alunos mobilizaram muitas variáveis visuais: o sinal do coeficiente angular da reta, indicando o crescimento e o decrescimento da função; o termo independente indicando a intersecção das retas com o eixo das ordenadas; os símbolos de relação na linguagem natural ao expressar: “*a função crescente x-5 é menor que a função decrescente –x+7*”, apontando para uma interpretação global.

Observamos ainda que esta dupla explicitou familiaridade com o significado de domínio de função bem como do papel que a variável independente desempenha nesse domínio.

As questões envolvendo propriedades de módulo os alunos mostraram mais familiaridade quando se tratava de |x|<a do que |x|>a, (a>0). Quanto a esta última a maioria acertava olhando no gráfico. No entanto, na resolução algébrica registraram –a>x>a e como é possível que esta simbologia seja destituída de significado, recorriam a solução gráfica interpretando o resultado obtido algebricamente como sendo] -∞ , -a [U] a , ∞ [.

Destacaremos a seguir, a produção dos AlunosDG referentes a resolução das questões referentes a estas duas propriedades. Na resolução da inequação, |4x-3| ≤ 5, esta dupla apresentou o conjunto solução da inequação, como mostra a figura a seguir:



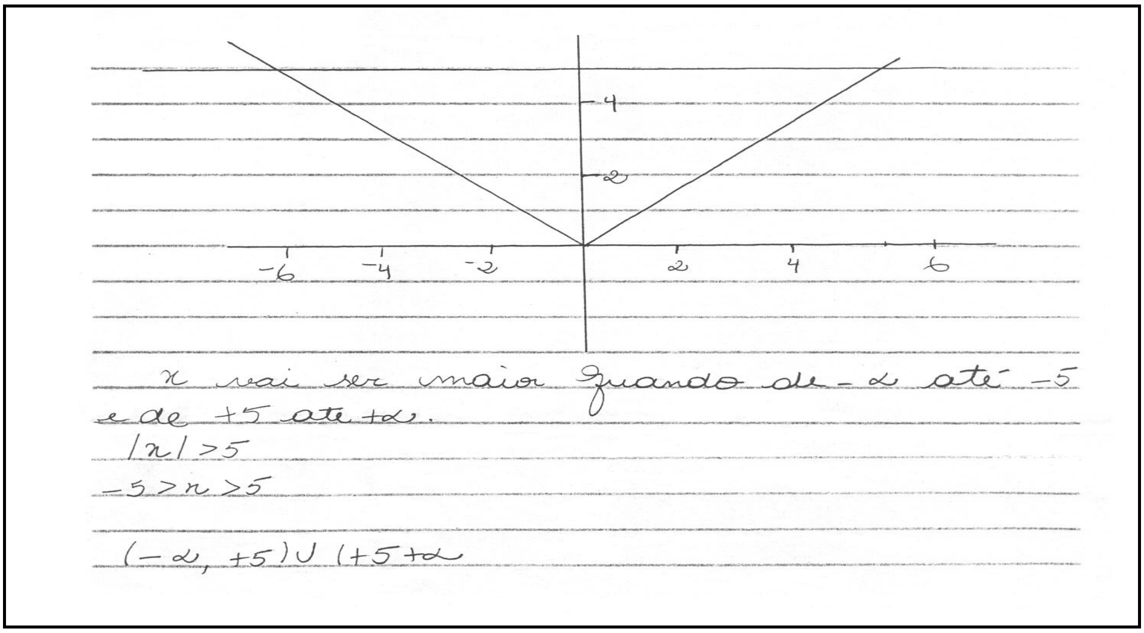
Na resolução gráfica estes alunos denotaram o conjunto solução da inequação sob a forma de intervalo, destacaram na reta y=5 o intervalo corresponde a solução e, além disso, o projetaram o segmento no eixo das abscissas.

A resolução algébrica parece não ter apresentado dificuldades. No entanto, a solução obtida num e no outro registro fora rigorosamente precisa o que pode nos levar a questionar se a notação sob a forma de intervalo não foi estabelecida após a resolução algébrica.

Se isto aconteceu, esse fato pode ser reflexo dos estudos na Educação Básica, em que o registro algébrico é o mais valorizado a ponto de determinar a exatidão de respostas, ao passo que pelo registro gráfico a dupla poderia ter chegado a uma resposta aproximada o que para ela poderia significar uma deficiência na resposta matemática, que só é correta se for única e exata.

No registro da língua natural esta dupla expõe uma resposta inadequada do ponto de vista matemático, porém, reforça a necessidade de expor o módulo referente a função visualmente mais destaca da inequação, lançando mão dos valores obtidos na resolução algébrica, que pode para ela ser o registro mais importante que qualquer outro.

Esta mesma dupla marcou uma resposta gráfica diferente da algébrica. Quando foram resolver a inequação |x|>5 como se observa a seguir:



Esta dupla apresentou um conjunto solução na registro gráfico, buscou a solução no registro algébrico e expôs uma solução matematicamente incorreta para a desigualdade |x|>5.

Provavelmente estes alunos buscaram a solução desta inequação de forma similar a |4x-3| ≤ 5, pois apresentaram algebricamente a resposta –5>x>5 e provavelmente sob influência da análise gráfica realizada anteriormente interpretaram, esta expressão como sendo] -∞, -5[U] 5, ∞[.

É interessante observar que] -∞, -5[U] 5, ∞[é solução da inequação. No entanto a expressão –5>x>5 talvez tenha sido interpretada como sendo] -∞,-5[U] 5, ∞[em função da primeira delas ser desprovida de significado ou então a dupla tenha tomado como interpretação a solução obtida graficamente.

Os símbolos de relações <, >, = são destacados por Duval como sendo variáveis visuais de uma representação algébrica e que a partir da leitura delas é possível retirar características da representação gráfica. Os alunos que expressaram–5>x>5 não consideraram essas variáveis visuais e não perceberam que esta desigualdade expressa uma simultaneidade que implica no absurdo de –5 ser maior que 5.

Na resolução da inequação $x^2 - 2x - 3 < 0$ percebemos, de maneira geral, que quando os alunos utilizam o registro na língua natural demonstram muitas dificuldades referentes à maneira de se expressar além de evidenciar falhas concernentes ao cotidiano matemático envolvido.

Esse registro se mostrou, na prática, muito eficiente para revelar dificuldades cognitivas que muitas vezes são mascaradas quando se utiliza apenas o registro algébrico. Conforme mostram as argumentações abaixo:

é uma parábola com a concavidade voltada para cima pois o x^2 é positivo, os nºs menores que zero que fazem parte desse gráfico é quando x for maior que -1 e menor que 3.

2) No computador a função forma uma parabola de raízes -1 e 3 sendo essas cortando o eixo do x, $x^2-2x-3=0$ é maior que -1 e menor que 3 sendo negativa

$]-1, 3[$ $\quad x^2-2x-3<0$

$\Delta = 4+12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$x' = 3 \quad x'' = -1$

A primeira citação, percebemos que os AlunosCK identificaram as variáveis visuais relacionadas ao fato que o sinal positivo do coeficiente de x^2 representar que a concavidade da parábola é voltada para cima. Apesar disso, destacamos algumas questões conceituais tais como: *"(...) os números (...) que fazem parte desse gráfico"* ou ainda *"(...) x^2 é positivo"*.

Na segunda, os AlunosMN, apresentaram uma solução precisa visto que as raízes eram números inteiros, porém na tentativa de resolução algébrica o que figura é apenas o cálculo das raízes da função quadrática. Este último fato pode identificar que eles não diferenciam a resolução de uma equação da de uma inequação.

Na presente tarefa a parábola envolvida foi comparada com a constante y=0 que representa o eixo Ox e como os alunos já haviam identificado, no registro gráfico que o arco da parábola correspondente, que a desigualdade solicitada estaria situado