O USO DE METÁFORAS NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES: O DISCURSO DO PROFESSOR

BOLITE FRANT, Janete – PUC-SP – janeteb@pucsp.br
GT: Educação Matemática / n.19
Agência Financiadora: Sem Financiamento

Introdução

Apresentamos uma reflexão teórica, baseada em dados empíricos, de uma pesquisa mais ampla onde investigamos o uso das metáforas no discurso do professor de matemática, em particular o professor de cálculo ao ensinar gráficos de funções de reais.

Na primeira parte apresentamos brevemente o quadro teórico utilizado. Na segunda e na terceira parte aplicamos esse quadro na análise de uma aula no ensino médio. Como unidade primária de análise se propõe as interações professor-aluno a propósito de uma tarefa matemática e usando recursos materiais específicos. Focamos nossa analise aos fenômenos relacionados com o uso de metáforas no discurso do professor e dos alunos.

Na quarta parte relacionamos a analise anterior com uma pesquisa mais ampla, que estamos desenvolvendo na atualidade, sobre os fenômenos relacionados com o uso de metáforas no discurso do professor e finalizamos com algumas considerações sobre as possíveis causas de esses fenômenos.

1 Marco Teórico

O marco teórico utilizado se apóia na teoria da cognição corporificada proposta por Lakoff y Núñez (2000). O núcleo central desta teoria está baseado nos resultados, relativamente recente, das pesquisas em lingüística cognitiva. Afirmam que a matemática é construída pelo ser humano e que sua origem deve ser investigada nos processos cognitivos cotidianos, como são os esquemas das imagens e o pensamento metafórico. Segundo estes autores, tais processos permitem explicar como a construção de objetos matemáticos, tanto os pessoais como os institucionais, está apoiada na maneira em que nosso corpo se relaciona com os objetos da vida cotidiana, sejam tais objetos físicos ou lingüísticos.

1.1 Pensamento Metafórico

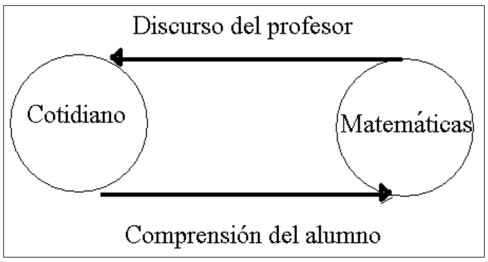
Neste trabalho assumimos a interpretação da metáfora como a compreensão de um domínio através de outro. As metáforas se caracterizam por criar uma relação conceitual entre um domínio fonte e um domínio alvo, onde são projetados propriedades e inferências do domínio fonte.

Segundo Lakoff e Johnson (1987) nossa representação do mundo tem influência das metáforas que elaboramos, quase sempre de modo inconsciente. Afirmam ainda que a maior parte dos seres humanos conceitualizam coisas novas em termos de coisas já conhecidas. Por exemplo, quando entendemos o sentimento de carinho por meio da experiência térmica utilizamos frases tipo “ um abraço caloroso”, “fulano é frio”.

É importante enfatizar que embora as metáforas dependam do relacionamento do nosso corpo com o mundo, não é necessário que seja considerado apenas as relações físicas e/ou manipulativas, as experiências lingüísticas também se “incorporam” em nossa mente-corpo. Existem dois tipos de metáforas que são interessantes para o caso da matemática:

- Metáforas Basicas: São as que mapeiam atividades corporais básicas em domínios mais abstratos. Por exemplo, em matemática: “As classes são caixas”, “função é uma máquina”, etc.

  Este tipo de metáfora se manifesta em aula em duas direções diferentes. Por um lado, as metáforas que o professor utiliza, de maneira consciente ou inconsciente, têm por objetivo relacionar a matemática com situações não matemáticas da vida cotidiana dos alunos para facilitar sua compreensão. Por outro lado, os alunos utilizam seus conhecimentos do cotidiano para compreender o conteúdo matemático. Com isso, os discursos se dão em direções distintas muitas vezes dificultando o dialogo.



- Metáforas de ligação: Os dois domínios, embora distintos, são de mesma natureza, no caso matemático. Por exemplo, “os números reais são pontos de uma reta”, “as funções de proporcionalidade direta são retas que passam pela origem das coordenadas”, etc..

A importância do pensamento metafórico na produção de significados e constituição de objetos matemáticos vem sendo reconhecida por investigadores da Educação Matemática, para citar apenas alguns citamos os trabalhos de Edwards nos Estados Unidos, Font na Espanha, Bolite Frant no Brasil, Arzarello e Robutti na Itália.

De acordo com a teoria da cognição corporificada, a matemática por ser construída pelo ser humano encontra-se nas idéias das pessoas e não em mundos transcendentes platônicos. A matemática surge dos mecanismos cognitivos e corporais das pessoas. Devido a sua origem comum aos seres humanos, as idéias matemáticas não são arbitrárias, nem são apenas o produto de convenções completamente sociais e culturais – ainda que os aspectos sociais e históricos tenham papéis importantes na formação e desenvolvimento destas idéias-[1].

Os autores afirmam ainda que a estrutura cognitiva necessária para compreender a matemática avançada usa o mesmo aparato conceitual que é usado para compreender situações ordinárias não matemáticas.

1.2 Metáforas relacionadas com gráficos de funções nos processos de ensino e aprendizagem.

Em diferentes trabalhos a relação entre a representação gráfica de funções e o uso de metáforas foi investigada. Destes queremos destacar os relativos a teoria adotada:

Núñez, Edwards e Matos (1999) e Barto (2004) mostram como o tipo de metáfora que relaciona um objeto matemático com um campo não matemático da vida cotidiana é fundamental para entender as dificuldades cognitivas relacionadas com a continuidade de funções.

Font (2000) observa que havia alunos que, quando moviam o ponto A para uma nova coordenada, pensavam que o novo ponto continuava sendo o mesmo ponto A e que a nova reta tangente era a mesma que antes mas com uma inclinação diferente. É como se uma pessoa se movesse (o ponto A) com um saco nas costas (reta tangente) por uma rua que primeiro sobe e depois desce. Neste caso tanto a pessoa quanto o saco são os mesmos apesar de estarem em lugares distintos. Tal fenômeno é relatado por Bolite Frant et al. (2004).

1.3 O discurso da matemática escolar

A prática institucional do ensino e da aprendizagem de matemática pode ser considerada como um tipo específico de discurso que se apresenta basicamente na forma escrita ou de modo oral-gestual. No primeiro caso temos os livros texto e o material elaborado pelo professor e no segundo temos o discurso na aula.

---

[1] Em Johnson (1991) se pode encontrar a justificativa filosófica que permite a esta teoría distanciar-se tanto do objetivismo realista como do relativismo.

Consideramos que o discurso nas aulas de matemática, apesar de estar relacionado tanto com o discurso do matemático profissional como com o discurso não matemático, é um tipo de discurso específico que não pode ser considerado como uma simples derivação de algum destes dois tipos de discurso.

Para poder analisar o discurso aqui apresentado as gravações em vídeo das sessões de aula foram transcritas seguindo a seguinte estrutura: na coluna da esquerda transcrevemos tanto o discurso oral do professor como o dos alunos, na coluna central colocamos o que o professor escreveu na lousa e na coluna da direita colocamos comentários, especialmente os comentários sobre a gesticulação dos professores.

Lembramos que o foco de nosso interesse é o discurso do professor, o discurso dos alunos só está registrado quando interagem com o professor.

2 Análise das metáforas presentes

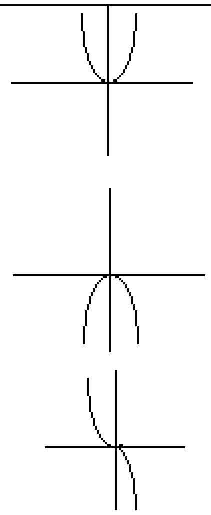
Na primeira configuração da transcrição da aula o professor propõe a resolução de um problema selecionado do livro de texto (esboce os gráficos das funções $f(x)=2x^4$, $g(x)=-\,2x^4$ y $h(x)=-2x^5$) e os alunos tinham que resolvê-lo em casa. Com a informação disponível não se pôde saber o grau de compromisso por parte dos alunos, particularmente quantos deles tentaram resolver o "exercício para casa" e o que foram capazes de fazer. Na aula filmada não há comunicação por parte dos alunos, somente a apresentação da solução por parte do professor que regula a forma de resolver a tarefa. Há um momento de avaliação coletiva mediante a pergunta genérica --*Concorda?* Há um momento em que o professor muda de tarefa, iniciando a segunda configuração.

A mesma se organiza ao redor da tarefa de determinar máximos, mínimos e pontos de inflexão de maneira visual a partir do esboço das três funções obtidas na configuração anterior. Só se observa a apresentação da solução por parte do professor.

A terceira configuração se organiza ao redor da tarefa de determinar a derivada em x =0 para cada uma das três funções das configurações anteriores. Não há comunicação por parte dos alunos, só a apresentação da solução por parte do professor quem ainda dá uma interpretação geométrica ao resultado obtido analiticamente. O professor observa que a derivada nos três casos é zero porque nos gráficos a reta tangente em x = 0 é horizontal.

Configuração 3: Cálculo da derivada em x=0.

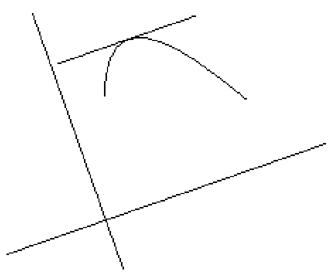
Transcrição da primeira parte da Configuração 3	Quadro	Observações

A parte *c*, para cada uma das funções se tem que encontrar uma derivada em $x = 0$, comecemos pela primeira, a efe, a primeira derivada………$8x^3$… a segunda derivada $24x^2$, pensemos que a primeira na função $f(x)$ em $x = 0$ apresenta um mínimo e a derivada em $x = 0$ é 0, como se esperava, porque agora esta tangente é horizontal, e a segunda derivada em $x = 0$ também da 0.		O professor faz o gesto de por a mão indicando a posição horizontal da reta tangente em cada gráfico.

2.1 Metáforas orientacionais

Na explicação anterior se pode observar o uso de uma metáfora orientacional (Lakoff e Johnson 1991) por parte do professor que na sua explicação utiliza o termo "horizontal" no lugar de utilizar a expressão "paralela ao eixo de abscissas". Na transcrição considerada assinalamos que somente em uma configuração o professor deixa de fazer a identificação entre eixo de ordenadas e eixo vertical e entre eixo de abscissas e eixo horizontal. Em compensação o livro didático utilizado ou indicado é muito escrupuloso neste aspecto e nunca faz esta identificação.

Essa metáfora é muito habitual nas aulas e pode induzir erros nos alunos, uma vez que os alunos ante o gráfico podem considerar que, quando *x* é a abscissa do máximo, a derivada não é zero porque a reta tangente não é "horizontal" como vemos no gráfico abaixo.



Esse erro não aparece com freqüência nas aulas pois tanto nos livros didáticos quanto nas explicações dos professores, em geral, se apresentam sistemas de coordenadas que têm o eixo de abscissas em posição horizontal e o eixo de ordenadas em posição vertical. Trata-se de um típico fenômeno de geração de exemplos protótipos.

Outro erro amplamente documentado na pesquisa sobre gráficos é a confusão entre o eixo de ordenadas e das abscissas ou entre x e y. Esta confusão se pode explicitar em base à metáfora orientacional porque o que o aluno guarda, e que ele considera importante, é que há um eixo vertical e um horizontal, seus nomes e representações são menos importantes. Um caso típico de esse fenômeno é o do aluno de 3º ano (14 anos) que está estudando a resolução gráfica do sistema de duas equações de primeiro grau. Diante da dúvida de qual é o eixo de ordenadas faz a seguinte pergunta ao professor:

> **A**luno: Qual é o eixo de ordenadas? È o eixo vertical? (acompanha a última pergunta com um gesto no qual põe a mão direita vertical)
>
> **P**rofessor: Sim, o eixo de ordenadas é o eixo vertical.

Essa identificação do eixo vertical com o eixo de ordenadas e o eixo dos "y", e o eixo horizontal com o eixo de abscissas e o eixo dos "x" funciona, em geral, com alguma confusão, até que se começa a estudar as assíntotas ou as retas paralelas aos eixos quando se estuda a geometria analítica. O fato de que há funções que tenham como assíntota vertical a reta $x = 0$ e como assíntota horizontal a reta $y = 0$ acrescenta a confusão sobre os eixos de coordenadas para alguns alunos. Esse é o caso do seguinte aluno (17 anos) de 2º ano da modalidade de Ciências Sociais, que embora apresentasse alguma confusão esporádica entre os eixos, depois de estudar as assíntotas horizontais e verticais apresentou grandes problemas para relacionar o seguinte: eixo de abscissas – eixo de ordenadas, eixo horizontal – eixo vertical, eixo do x – eixo do y e reta $y = 0$ – reta $x = 0$. Seu problema ocorria pois não entendia como que um mesmo eixo podia ser representado com a letra correspondente ao outro eixo.

> Professor: a assíntota horizontal não é $x = 0$.
>
> Aluno: mas não é o eixo de abscissas.
>
> Professor: sim, mas o eixo de abscissas se representa por $y = 0$, não por $x = 0$.
>
> Professor: (diante a cara de assombro do aluno): o eixo de abscissas, o horizontal, se representa pela letra x, mas também se pode considerar formado por todos os pontos nos que a altura é zero, ou seja, por todos os pontos que têm o y igual a zero.

Segundo a teoria da cognição corporificada, as metáforas orientacionais se originam do fato do que nossos corpos sendo como são se relacionam de uma determinada maneira com o ambiente físico, determinando um sistema de referencia egocêntrico.

As metáforas orientacionais dão a um conceito uma orientação espacial: por exemplo, *mais é acima, menos é abaixo*. Essas metáforas não são arbitrárias, têm uma base em nossa experiência física e cultural e, também, são a base das teorias científicas. No caso que nos ocupa, os sistemas de eixos coordenados, a metáfora orientacional atua a três níveis, por um lado encontra-se já fossilizada nos conceitos teóricos (por exemplo, os valores do eixo das ordenadas que estejam por acima da origem são positivos, quando os que estão abaixo são negativos), por outro lado está presente na explicação do professor quando, para tornar mais intuitivos os conceitos teóricos, recorre a metáforas que se ajustem à experiência pessoal dos alunos (por exemplo quando identifica eixo de ordenadas com eixo vertical e eixo de abscissas com eixo horizontal). Também está presente na maneira com que o aluno organiza seu conhecimento dos eixos de coordenadas já que este recorre a metáforas orientacionais baseadas em sua experiência corporal.

2.2 Metáforas ontológicas

Na configuração 3, e em geral em toda a transcrição, se observa o que Lakoff e Johnson (1991) consideram um tipo de metáfora ontológica. Esta metáfora, que tem sua origem em nossas experiências com objetos físicos, permite considerar acontecimentos, atividades, emoções, idéias, etc. como se fossem entidades (objetos, coisas, etc.) ou substâncias. Esta metáfora se combina de maneira inconsciente com outra metáfora ontológica: a do caixa ou container[2]. A combinação de metáforas permite considerar idéias, conceitos, etc. como entidades que se contem e estão contidas umas nas outras.

As metáforas ontológicas permitem entender cada um dos eixos como um objeto (conjunto) que a sua vez está formada por outros objetos-- os pontos, que também estão presentes quando consideramos o plano formado por pontos. A aplicação destas metáforas a os eixos tem suas vantagens e inconvenientes. Por exemplo, por um lado permite considerar (singularizar) um ponto numa reta, mas por outro também pode

---

[2] A metáfora do "contenedor", segundo Núñez (2000), é uma metáfora que se usa para estruturar a teoria de classes. Para este autor se trata de uma metáfora ontológica inconsciente que tem suas raízes no cotidiano e que podemos visualizar da seguinte maneira (Núñez, 2000, p. 13):

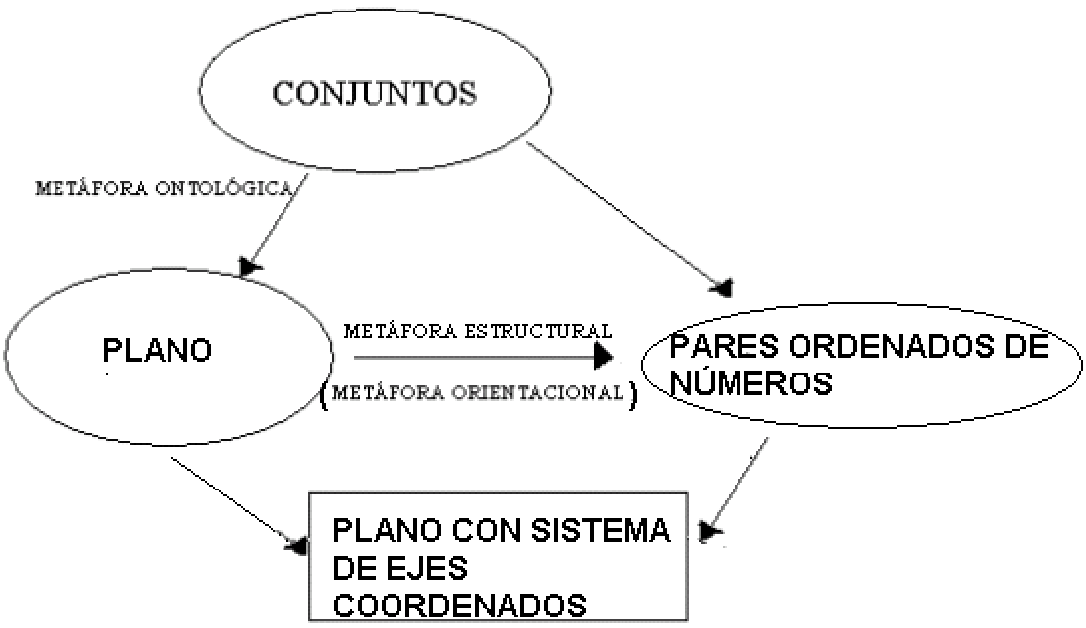
Las clases son contenedores

Dominio de partida *Esquema del contenedor*	*Domino de llegada* *Clases*
Interior del contenedor	*Clase*
Objetos dentro del contenedor	*Miembros de la clase*
Ser un objeto del interior	*La relación de pertenencia*
Un interior de un contenedor dentro de uno mais grande	*Una subclase de la clase mais grande*
Superponer el interior de dos contenedores	*Intersección de dos clases*
La totalidad de los interiores de dos contenedores	*La unión de clases*
El exterior de un contenedor	*El complementario de la clase*

ajudar que o aluno considere que cada ponto tem espessura ou que a reta está formada por uma série de pontos em seqüência, onde cada um tem um anterior e um posterior.

2.3 Fusão conceptual.

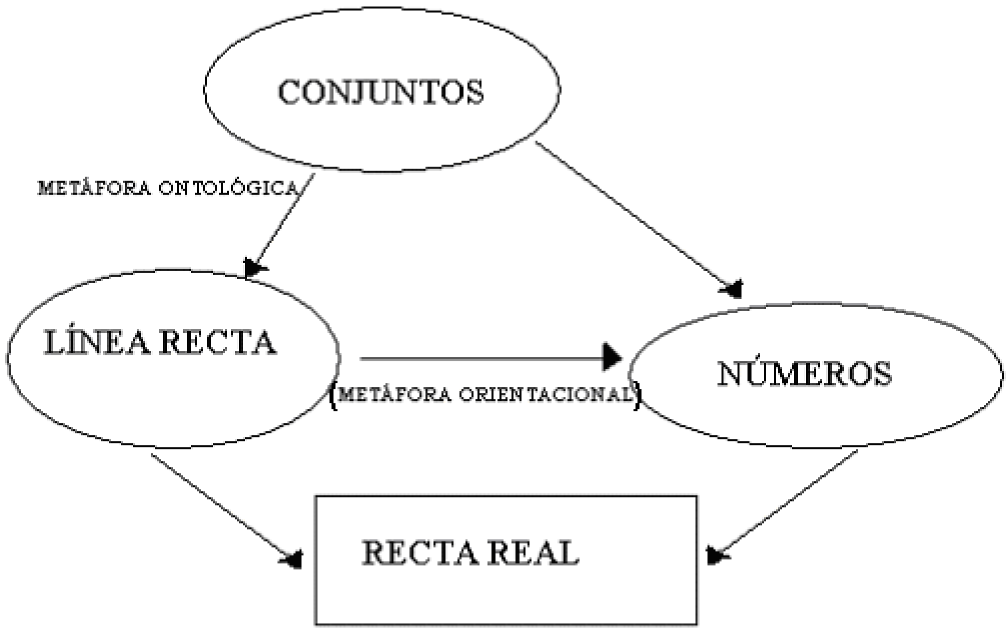
No "plano com sistema de eixos coordenados" tanto as metáforas orientacionais como as ontológicas se encontram fossilizadas - metáforas que tiveram um papel importante na construção institucional dos conceitos teóricos e que não mais tem esse papel. Graças as metáforas ontológicas tanto o plano como os pares ordenados podem ser considerados como conjuntos. Por outro lado, as metáforas orientacionais estão na base da metáfora estrutural que permite entender os pontos do plano como um par ordenado de números (e vice-versa). A combinação destas metáforas, junto a outros fatores, possibilita a emergência do objeto "plano com um sistema de eixos coordenados fixados a priori". Na ciência cognitiva atual, alguns autores chamam a este tipo de processo *montagem conceituai* (conceptual blending) (Fauconnier e Turner 1996).



Fusión conceptual

A partir desta noção cada eixo é o resultado de uma montagem conceitual.

As metáforas ontológicas permitem entender como conjuntos tanto a reta como os números. As metáforas orientacionais estão na base da metáfora estrutural que permite entender os pontos da reta como números (e vice-versa) – a metáfora orientacional é a que permite considerar que aos números positivos lhes correspondam pontos que se encontram à direita da origem e aos números negativos pontos à esquerda; e que assim um número é maior que outro, o ponto que corresponde ao primeiro se localiza à direita do que corresponde ao segundo.



2.4 Gráficos Cartesianos Estáticos

Segundo Font (2001) a última das metáforas que estruturaram historicamente os gráficos de funções é a que denomina "metáfora conjuntista". Se trata de uma metáfora estática que permite entender o gráfico de uma função $f(x)$ como o conjunto de pontos cujas coordenadas são $(x, f(x))$. Para que tal trama se ponha em funcionamento, uma condição necessária é que o sujeito tenha realizado previamente uma montagem conceitual que lhe permita entender o plano como um conjunto de pontos de coordenadas (x, y).

2.5 Metáforas Dinâmicas

A quarta configuração consiste em um comentário do professor sobre o fato de que se a segunda derivada é zero podemos ter máximos, mínimos ou pontos de inflexão. Primeiro calcula a primeira e a segunda derivada das três funções anteriores fazendo os alunos observarem que nos três casos em $x = 0$ a segunda derivada se anula. Depois utiliza os gráficos das funções cujo esboço estava desenhado na lousa para fazer com que vejam que na primeira função em $x = 0$ existe um máximo, na segunda um mínimo e na terceira um ponto de inflexão. Não há diálogo por parte dos alunos, o professor se limita ao monólogo explicativo.

A quinta configuração se organiza em torno da técnica que o professor propõe para determinar se tem um máximo, um mínimo ou um ponto de inflexão em $x = a$ quando

$f''(a) = 0$. Para ilustrar tal técnica toma o caso particular "$a = 0$", y propõe realizar o estudo da variação da primeira derivada em um intervalo que compreende o ponto de abscissa $x = 0$.

Configuração 5: Critério suficiente de máximos, mínimos e pontos de inflexão. Estudo da variação da derivada em torno de um ponto

Transcrição	Lousa	Observações
Na atividade anterior deve-se observar que se a primeira derivada em $x=a$ é 0, e a segunda derivada em $x = a$ também é 0, são possíveis diversas situações. E neste caso, é conveniente fazer o estudo do comportamento do sinal da primeira derivada em torno de $x = a$, para determinar em que situação nos encontramos. Isto quer dizer que se nós sabemos que há em $x = a$ um máximo ou um mínimo ou um ponto de inflexão, e ao fazer a segunda derivada dá zero. A segunda derivada não nos traz nova informação. O que se deve fazer é uma tabela de variação. Se antes do zero é crescente, se depois de zero é crescente, se antes do zero e depois do zero é crescente temos um ponto de inflexão. Se antes do zero é crescente e depois do zero é decrescente, um máximo. Se antes do zero é decrescente e depois de zero é crescente, um mínimo. Fez uma tabela de cada função. Alguma pergunta?	Continuam desenhados gráficos da C3	O professor lê este parágrafo literalmente do livro texto. Acompanha este comentário com gestos sobre os gráficos desenhados na lousa.

Nesta configuração, o discurso metafórico do professor pode induzir o aluno a entender o zero como um ponto determinado sobre um caminho que se percorre ou uma via por onde se transita. Palavras como "antes de zero", "depois de zero" podem ter este impacto nos alunos. Para Lakoff e Núñez (2000) esta é uma poderosa metáfora muito utilizada pelos professores em todos os níveis de ensino. Tal metáfora sugere uma organização espacial, tem uma origem -"de", um caminho --"passa por", "aqui", "ao longo", e um fim -- "a", "até") e sobretudo contempla algo que se move (ponto, objeto, etc.) e que se pode localizar em um dado momento.

2.6 Rastro

Outra maneira de estruturar o gráfico de uma função, diferente da metáfora conjuntista, consiste em considera-lo como o rastro que deixa um ponto que se move sujeito a determinadas condições, ou como o rastro que deixa um ponto que se move sobre o gráfico. As metáforas dinâmicas são basicamente metáforas orientacionais que surgem porque nosso corpo determina um sistema de referência egocêntrico que se move, também porque criamos na linguagem movimento para coisas estáticas, por exemplo a rua A cruza a Rua B. A rua é um objeto estático ela não se move quem se move são pessoas ou carros andando na rua. Este tipo de metáfora, que cria movimento, é chamado de movimento fictivo e foi inicialmente tratado por Talmy (2000) (ver também Dalanese 2006).

Este tipo de metáfora é encontrado na história da matemática (Font 2000 y 2001). Apesar das curvas estarem presentes em toda a história da matemática, um dos momentos em que se coloca claramente a passagem do gráfico da curva para sua expressão simbólica foi no momento do nascimento da geometria analítica. Na primeira parte do segundo livro de "La Géométrie", Descartes se pergunta quais são as linhas curvas que se pode admitir em geometria e se pergunta por que os antigos não distinguiram diversos graus entre as linhas mais complexas e por que chamaram mecânicas a algumas delas. Nesta primeira parte também divide as curvas em mecânicas e geométricas. Para Descartes, uma curva é geométrica se podemos imagina-la descrita por um movimento contínuo ou por vários movimentos sucessivos de tal maneira que os últimos sejam determinados pelos anteriores, embora as curvas mecânicas sejam as que resultam de dois movimentos independentes que não guardam entre si uma relação que possa ser medida.

Para clarificar o que entende por curva geométrica, Descartes constrói um instrumento que lhe permite desenhar uma série de curvas mais complexas que as cônicas, e que, segundo ele, tem o mesmo direito de existência e de serem estudadas como as seções cônicas. A curva geométrica é para Descartes o rastro produzido por um ponto que se move por um instrumento articulado composto por diversas regras, de maneira que o movimento efetuado sobre uma regra se transmite por diferentes regras do instrumento e faz com que o ponto se mova traçando uma determinada curva. Esta maneira de entender a curva -e a introdução implícita do sistema de coordenadas- faz com que Descartes possa encontrar a expressão algébrica da curva; também o leva a definir claramente tais curvas como o objeto que depois vai chamar de Geometria Analítica.

Os trabalhos de Descartes são muito interessantes porque identificamos que partem das duas metáforas clássicas sobre curvas:

1) As curvas são seções

2) As curvas são o rastro deixado por um ponto que se move sujeito a determinadas condições

E acrescentamos uma terceira:

3) Se as curvas são o rastro deixado por um ponto que se move sujeito a determinadas condições, a análise destas condições permite encontrar uma equação a que se submetem os pontos de tal curva

Desde o principio do século XIX, quando Cauchy inicia a reorganização da análise infinitesimal, esta última metáfora é a que se pode encontrar nos livros de análise infinitesimal. I.e., a partir da aritmetização da análise, os gráficos de funções foram considerados como a trajetória descrita por um ponto em movimento, a qual se podia expressar por uma fórmula.

Esta maneira de entender os gráficos de funções está descrita na obra de Newton onde podemos encontrar referências, constantes, a um ponto que se move sobre uma parábola, uma hipérbola, etc. No parágrafo seguinte, extraído de Lacasta y Pascual (1998, pp. 28-29), onde Newton explica seu método para funções se observa claramente como o mesmo se manifesta explicitamente a favor das metáforas dinâmicas e contra a metáfora conjuntista:

> *No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que éstas sean, sino como descritas por um movimiento continuo. Las líneas no son descritas y engendradas por la yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de pontos; las superficies por el movimiento de las líneas; los sólidos por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de los lados; los tiempos por um flujo continuo. Considerando, pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según que lo hagan con mayor o menor velocidad, busqué um método para determinar las magnitudes partiendo de las velocidades de los movimientos o aumentos que las engendran. Llamando fluxiones a las magnitudes engendradas, di, hacia los años 1665-1666, con el método de fluxiones, del que haré uso en la cuadratura de curvas.*

A partir dos trabalhos de Fourier, Cauchy e Dirichlet, entre outros, passaram a ser aceitos como gráficos de funções curvas que não podiam ser trajetórias. Com a aplicação posterior da teoria de conjuntos as funções, ganhou espaço a metáfora conjuntista:

4) O gráfico de uma função f é definido como o conjunto formado pelos pontos de coordenadas $(x, f(x))$.

Atualmente, existem programas informáticos, facilmente utilizáveis na aula, que facilitam este tipo de metáforas dinâmicas. Uma variação desta metáfora: o gráfico de uma função é o rastro de um ponto que se move seguindo o gráfico, pode ser explorada utilizando programas gratuitos como winplot, graphmatica e com as calculadoras gráficas.**3 Coexistência das metáforas estáticas e dinâmicas .**

Posto que as metáforas dinâmicas e as estáticas estruturam de maneira diferente a compreensão do gráfico de uma função é necessário nos perguntar pelo tipo de coexistência que se produz.

3.1 Coexistência institucional

Se tentamos responder a partir de uma análise histórica, a resposta seria que mais que coexistência o que se observa é que há períodos onde uma domina sobre a outra. Sendo a metáfora conjuntista a que atualmente é preponderante no ensino, onde é considerada a de maior rigor e na sala de aula tradicional quase não há espaço para as dinâmicas. Assim, ao invés de uma montagem conceitual, por nós recomendável, temos a desaparecimento de uma em lugar da outra.

Ainda que as metáforas dinâmicas e as estáticas sejam cognitivamente mecanismos diferentes temos certas implicações comuns. Por exemplo, ambas permitem distinguir entre gráfico e ponto. Este fato faz com que um professor experiente as use de maneira coerente,p.e., no caso do domínio de uma função ser um intervalo fechado, se supormos que o extremo do intervalo se move até chegar ao outro extremo se obtém um conjunto que é o domínio desta função.

3.2 O papel da coexistência de metáforas na negociação de significados

Se nos perguntamos pela coexistência de ambos tipos de metáfora na negociação de significados em aula, o que se observa é uma maior presença das metáforas dinâmicas em contrapartida ao livro texto que apresenta preponderância das estáticas. Vejamos na continuação um exemplo do papel da coexistência de metáforas nesta negociação.

Em uma configuração posterior, a de n.º 8, o professor tem por objetivo recordar o conceito "domínio de uma função" e as técnicas estudadas para sua determinação. Para isto, o professor propõe dois exemplos, o primeiro é sobre a função racional $f(x)=1/(x+1)$. O professor coloca que: *o domínio é o conjunto de valores da variável independente que tem imagem* e a seguir diz o seguinte: *são os valores dos quais se pode calcular a imagem*. Esta segunda formulação, para os alunos, resulta mais operativa o cálculo do domínio que a primeira, já que favorece entrar num "jogo de linguagem" que permite chegar a um consenso sobre qual é o domínio da função. As características deste jogo são:

- *Introdução de um elemento genérico*. O professor introduz o elemento genérico x sobre o qual o aluno deverá realizar as operações indicadas na fórmula da função mediante a frase "quando eu substituo o x (assinala o x da fórmula com o dedo) por esses números, posso fazer todo este cálculo (com a mão rodeia a fração $1/(x+1)$) e depois diz "tomemos um número" e espera que os alunos mentalmente encontrem os valores para os quais é possível realizar as operações indicadas pela fórmula da função.
- *Consenso sobre a possibilidade de valores para o elemento genérico*. Os alunos formulam hipóteses sobre o domínio até chegarem a uma que é aceita pelos mesmo e sobretudo é aceita pelo professor, a autoridade máxima da sala. Neste caso vários alunos dizem "todos menos o -1" e o professor se dá por satisfeito com esta afirmação.

No segundo exemplo se reproduz o mesmo jogo de linguagem com as seguintes variantes. A primeira é que neste caso o elemento genérico é um ponto da parte negativa do eixo das abscissas. Neste caso, o professor desenha o gráfico da função $f(x)= \ln x$ e espera que os alunos mentalmente apliquem a técnica de: 1) pensar em um ponto da parte negativa do eixo das abscissas, 2) traçar a perpendicular ao eixo das abscissas por este ponto, 3) observar que esta reta não corta o gráfico da função logaritmo neperiano e 4) que este raciocínio é válido para qualquer ponto da parte negativa do eixo das abscissas e também para a origem das coordenadas (esta técnica gráfica de determinação do domínio já havia sido trabalhada em uma unidade anterior). A segunda variante é que, quando os alunos respondem "de zero a mais infinito", o professor considera ambígua esta resposta para chegar a um consenso e decide intervir pedindo aos alunos que digam se o zero pertence ao domínio, para depois aceitar como boa a resposta dos alunos de que o zero não está no domínio.

É importante enfatizar que o consenso a que se chega é colocado em termos metafóricos uma vez que, tanto os alunos como o professor, utilizam a expressão "de zero a mais infinito". Os alunos o fazem oralmente, enquanto que o professor associa a esta expressão oral uma representação $(0,+\infty)$ e também sua gesticulação sobre a parte positiva do eixo das abscissas (move a mão da origem das coordenadas para a direita).

Se trata da metáfora que considera a semi-reta numérica como um caminho com um começo e mas sem fim (o infinito).

A combinação da linguagem dinâmica e o movimento da mão permite entender o domínio, um caso de infinito atual posto que é um intervalo aberto, como o resultado de um movimento sem fim que tem um principio. Segundo Lakoff y Núñez (2000), entendemos este caso de infinito atual porque projetamos nosso conhecimento sobre processos que têm principio e fim. Lakoff y Núñez afirmam que os processos que continuam indefinidamente se conceitualizam metaforicamente como tendo um final e um último resultado. Para estes autores, este mapeamento é chamado de Metáfora Básica do Infinito.

3.3 Coexistência na compreensão dos alunos

O uso de metáforas dinâmicas no discurso do professor produz impactos significativos na compreensão dos alunos e em nossa interpretação podem ser até mais dominantes que os impactos produzidos pela metáfora conjuntista do livro. Em geral, os alunos passam a não ler os livros texto valorizando mais suas anotações de aula e mais uma vez ao invés da montagem desejada acabam por optar por apenas um tipo metafórico.

Acreditamos que o objetivo no currículo do ensino médio é o ensino de uma técnica analítica de representação gráfica de funções. Para facilitar sua compreensão o professor utiliza de maneira pouco consciente, y segundo ele, em sua entrevista, de maneira inócua, expressões que implicam em metáforas do tipo «o gráfico é o rastro que deixa um ponto que se move sobre o gráfico ou similares. As respostas dos alunos sugerem claramente que este tipo de metáfora tem muito mais peso do que normalmente se considera, já que são as mais utilizadas, por eles, para responder as perguntas, no lugar das definições, consideradas pelo professor mais precisas e rigorosas, formuladas em termos conjuntistas estáticos, encontradas no livro texto e também nos cadernos.

4 Considerações finais

Neste trabalho se constata a importância que tem o uso de metáforas dinâmicas, tanto o discurso do professor como no do aluno, nos processos de ensino e aprendizagem de funções. Este uso, ao mesmo tempo inevitável, uma vez que é parte da maneira de nos expressarmos, e pouco consciente, antes de ver os vídeos o professor não tinha idéia de seu uso, é fundamental na construção dos objetos matemáticos pelos alunos e também na negociação de significados em aula.

As causas que podem explicar este fenômeno são bastante complexas. Por um lado, como colocam Lakoff e Núñez (2000), o uso de mapeamento metafórico é fundamental na compreensão de qualquer tema –e, por tanto, em sua explicação.

Segundo nossos resultados, a representação gráfica de funções necessita de uma descrição em termos globais dinâmicos e de uma introdução de conceitos locais formulados em termos conjuntistas estáticos. Estes conceitos locais apresentam uma grande dificuldade para os alunos, motivo pelo qual, a nosso entender, há professores que os deixam em segundo plano e preferem utilizar explicações dinâmicas que consideram mais intuitivas, nas quais o uso de metáforas dinâmicas é inevitável.

Não queremos dizer que o uso de tais metáforas seja bom ou ruim, o uso de metáforas dinâmicas tem suas vantagens e seus inconvenientes. Assim não se trata da tarefa impossível de renunciar a usá-las mas de que o professor esteja consciente de seu uso e contemple esta idéia em seu discurso para que os alunos possam também perceber e estar conscientes de que nem sempre pensar deste modo será vantajoso.

Deste modo sugerimos que os professores de cálculo além de estudarem a matemática para suas aulas se interem desta teoria para que promova em sua sala não apenas um discurso mais rico e mais consciente como também promova um espaço de maior dialogo para que se torne consciente das metáforas utilizadas pelo seus alunos e possa, de fato, negociar significados.

Bibliografia

Acevedo, J. I. , Font, V. y Giménez, J. (2004) Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions. In Giménez,, J, Fitzsimons, G, Hahn, C (ed) Globalisation and mathematics Education. CIEAEM 54 (pp. 336-342). Barcelona: Graó.

Barto, M.C. (2004) Um olhar sobre as idéias Matemáticas em um curso de Cálculo: a produção de significados para a continuidade. Dissertação Mestrado PUC SP

Bolite Frant et al. (2004) Reclaiming visualization: when seeing does not imply looking. TSG 28, ICME 10, Denmark http://www.icme-organisers.dk/tsg28

Dall'Anese, C. (2006) Argumentos e Metáforas Conceituais para a taxa de variação. Tese de doutorado. www.pucsp.br/pos/edmat

Fauconnier, G.; Turner, M. (1996). Blending as a Central Process of Grammar, en A. Goldberg (ed.), Conceptual structure, discourse and language (pp. 113-129). Stanford: CSLI.

Font, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del professor. El caso de las gráficas de funções. Enseñanza de las Ciencias, 21, 3, 405-418.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2004). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. XX Jornadas del SI-IDM. Madrid 2004.

Johnson, M. (1991). El corpo en la mente. Madrid: Debate.

Lacasta, E.; Pascual, J.R. (1998). Las funções en los gráficos cartesianos. Madrid: Síntesis

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). Metáforas de la vida cotidiana. Madrid: Cátedra

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics, en Nakaora T. y Koyama M. (eds.). Proceedings of PME24 (vol.1, pp. 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

Núñez, R., Edwards, L. y Matos, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 39, 45-65.