OS PROFESSORES E O CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA INVESTIGAÇÃO À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

ROSSINI, Renata – PUC-SP – renatars@uol.com.br
GT: Educação Matemática / n.19
Agência Financiadora: Sem Financiamento

Introdução

O objetivo da pesquisa foi investigar a (re)construção do conceito de função em um grupo de docentes, ao desenvolverem coletivamente e aplicarem uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem do tema em uma sala de oitava série do ensino fundamental.

A seguir, apresenta-se um panorama histórico do conceito de função, fundamentação teórica, os procedimentos metodológicos, a questão norteadora, a análise da produção docente, conclusões e implicações futuras.

Panorama histórico

O historiador Youschkevitch (1981) considera três etapas no desenvolvimento do conceito de função, até a metade do século XIX: a Antigüidade, a Idade Média, o Período Moderno.

Na Antigüidade, o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades, na Antigüidade, não levou à criação de nenhuma noção geral de quantidades variáveis e nem de funções.

Na Idade Média, na ciência européia do século XIV, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era definido por uma descrição verbal ou por um gráfico, mais que por uma fórmula.

No Período Moderno, a partir do fim do século XVI e especialmente durante o século XVII, a classe das funções analíticas tornou-se a principal classe utilizada. Uma função analítica é geralmente expressa por meio de somas de séries infinitas.

Ao ligar uma curva plana algébrica a uma equação por meio das coordenadas de seus pontos, as coordenadas sendo consideradas como segmentos de reta, Descartes foi o primeiro a sustentar a idéia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de maneira a permitir o cálculo dos valores de uma delas em correspondência aos valores dados pela outra.

A primeira definição explícita de uma função como expressão analítica apareceu num artigo de Jean Bernoulli, publicado nas memórias da Academia Real de Ciências de Paris, em1718. "Definição. Chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira que seja desta grandeza variável e de constantes" (BERNOULLI, J. 1742, p.241 *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p.35).

No século XX, um grupo de jovens matemáticos franceses fundou, em 1935, a Associação Bourbaki, a fim de organizar toda a matemática conhecida, segundo o pensamento formal de Hilbert. Eles publicaram, em 1939, o primeiro livro da coleção *Théorie des ensembles* (*fascicule de résultats*), que contém todas as definições e todos os principais resultados. Nele encontra-se a moderna definição de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.
>
> Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (BOURBAKI, 1939, p.6 apud MONNA, 1972, p.82)

O estudo das diversas definições de função mostra que desde o século XVII até a revolução estruturalista desencadeada pelo grupo Bourbaki, emergiram diferentes concepções de função, ou seja, maneiras diferentes de perceber o objeto matemático função, de utilizar ou enfatizar suas propriedades. A noção de concepção, segundo Artigue (1989, p.14), coloca em evidência a diversidade de pontos de vista possíveis sobre um mesmo objeto matemático.

Fundamentação teórica

A pesquisa fundamentou-se na *Teoria Antropológica do Didático* (TAD), cujas noções básicas são organização praxeológica matemática e organização didática.

Para Chevallard (1999), toda atividade em Matemática consiste em executar uma tarefa t de determinado tipo T, por meio de uma técnica τ, que é justificada por uma tecnologia θ e a qual, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Esse autor considera o bloco [tarefa/técnica] o *saber-fazer*, ao passo que o bloco [tecnologia/teoria] é o *saber.* Assim, em torno de um tipo de tarefa se encontra um trio formado por uma técnica, uma tecnologia e uma teoria, e isso constitui uma *praxeolologia pontual*.

Sob a ótica da TAD, no estudo do conceito de função, não se pergunta mais qual é a definição de função, mas quais são os tipos de tarefas a serem executadas, quais são as técnicas envolvidas e as respectivas justificativas tecnológicas e teóricas. Assim, o conceito matemático de função emerge dessas praxeologias, que existem em um dado momento histórico, em uma determinada instituição.

Neste trabalho, considera-se como *organização pontual*: tarefas, técnicas e discursos tecnológico/teórico que giram em torno de cada concepção de função.

A partir da palavra grega *didaktikós*, que significa próprio à instrução, relativo ao ensino, Chevallard (1999) associa o adjetivo didático ao substantivo estudo. Assim, a idéia do didático diz respeito, fundamentalmente, à idéia de tomar atitudes para aprender alguma coisa (saber) ou de aprender a fazer alguma coisa (saber-fazer).

Na academia, estudar um problema conduz à elaboração de uma organização praxeológica inédita. Na escola, estudar uma questão é recriar, sozinho ou em grupo, uma resposta que já foi produzida em alguma outra instituição. Estudar é estudar um tema que existe na sociedade, para reconstruí-lo, para fazer a transposição na instituição onde esse assunto está sendo estudado. As praxeologias didáticas ou organizações didáticas são as respostas às questões de *como* estudar um determinado tema.

Sob a luz da *Teoria Antropológica do Didático*, o problema do professor é ensinar, ou seja, fazer funcionar, em uma classe, uma determinada organização matemática (Chevallard, 2001). Isto é, ele precisa (re)construir uma organização didática, que solucione a tarefa que ele vai propor aos alunos. Por exemplo, na tarefa "calcular o valor de uma função em um ponto", o professor se depara com a questão de como propor o exercício para o aluno.

Uma questão norteadora

Quais organizações matemáticas são mobilizadas durante a construção de uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função para uma oitava série do ensino fundamental?

Procedimentos metodológicos

O método de pesquisa utilizado considera alguns pressupostos da pesquisa-ação, que postula a explicita interação entre pesquisadores e os participantes da pesquisa. Além disso, conforma-se aos moldes de uma *ação-pesquisa*, segundo Barbier (2004), uma vez que a pesquisadora decidiu o tema, sugeriu a elaboração e aplicação de uma seqüência didática. As propostas foram aprovadas e bem vindas pelos participantes, que a partir desse momento, passaram a ser os agentes do processo.

A pesquisadora desempenhou um papel ativo no equacionamento dos problemas, debatendo as questões que foram surgindo sobre conteúdos matemáticos, sobre as atividades propostas pelos professores, procurando estabelecer um clima de confiança e respeito. Além disso, socializou as produções escritas, acompanhou os professores durante a aplicação do experimento-piloto e da seqüência de ensino.

Execução da pesquisa

A formação ocorreu nas dependências de uma universidade filantrópica, ao longo de dezoito semanas; cada reunião teve a duração de três horas. A aplicação de um experimento-piloto de duas horas e da seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função ensino ocorreu na mesma escola pública da Rede Estadual de Ensino localizada na região metropolitana da Grande São Paulo. Devido às diferentes dinâmicas, o tempo da formação foi dividido em quatro fases.

Na primeira fase, após alguns debates coletivos, doze professores, cujos nomes neste trabalho são fictícios, se organizaram espontaneamente em três grupos (A, B e C).

Na segunda fase ocorreu a aplicação de um experimento-piloto, uma iniciativa do grupo B, com duas horas de duração e que contou com a participação de dez alunos de oitava série. Professores dos outros grupos se mobilizaram espontaneamente para participar como observadores. Após a aplicação desse experimento, duas reuniões foram dedicadas à leitura e análise da produção discente, a pertinência (ou não) das atividades propostas. Além disso, os professores externaram opiniões sobre o papel de observador.

Na terceira fase, devido à diminuição do número de participantes, os sete remanescentes trabalharam colaborativamente em um único grupo e prepararam a seqüência de ensino, modificando algumas das atividades do experimento-piloto e construindo outras. A quarta e última fase contemplou o período de aplicação da seqüência de ensino, quando foram realizadas seis sessões, cada uma abrangendo o tempo de uma aula dupla e as duas últimas reuniões com professores.

A seguir, analisa-se as organizações didáticas e matemáticas em torno das concepções de função mobilizadas pelos participantes da formação: padrão de regularidade, interdependência entre grandezas, máquina de entrada e saída. Relações binárias e função como correspondência entre dois conjuntos foram discutidas e descartadas, ou nem levadas em consideração.

Análise da produção docente

Padrão de regularidade

A concepção de função como *padrão de regularidade* foi um dos traços comuns aos três grupos que se formaram na primeira fase.

Um dos três grupos de professores trouxe uma cópia de uma atividade denominada *Dobrando papel*. A redação original: “Vamos dobrar a folha de papel e contar em quantas partes ela fica dividida”.

O grupo acrescentou uma tabela:

Número de dobras	1	2	3
Número de partes	2	4	6

Introduziu as tarefas: (a) Se pudermos continuar, com 5 dobras, quantas seriam as partes? E com 8 dobras? (b) E quando o número de partes for 1024, quantas dobras foram feitas? (c) Qual é a sua conclusão? (d) A professora Vera disse que dobrando 4 vezes o papel conseguem-se 8 partes? Ela está correta?

Na análise *a priori* feita pelos professores, houve uma preocupação com as possíveis técnicas que os alunos poderiam utilizar para resolver as tarefas.

Considera-se que as tarefas pedidas podem levar o aluno a perceber, implicitamente, uma dependência entre o número de dobras e o número de partes.

Essa atividade foi aplicada no experimento-piloto. A posterior leitura dos protocolos dos alunos e os debates que se sucederam levaram a uma nova redação de *Dobrando papel* e sua inclusão na seqüência de ensino como a primeira a ser aplicada.

Chamou a atenção o fato de que uma das professoras acreditava que a dependência iria surgir naturalmente, como resposta do terceiro item e que seria “bobinho” colocar uma questão específica sobre dependência. Além disso, acreditavam que os alunos perceberiam a potenciação.

Dessa forma, os professores decidiram incluir uma segunda tabela e as tarefas: É possível escrever o número de partes como potências de base 2? Em caso afirmativo, preencha novamente a tabela:

Número de dobras	1	2	3	4	5
Número de partes					

Acrescentaram mais dois itens: (c) Existe uma limitação física para continuar dobrando o papel, mas você pode fazer isto mentalmente. Se você pensar em 8 dobras, quantas partes são obtidas? (d) Se o número de partes for 512, quantas dobras devem ser feitas? Explique sua maneira de obter o resultado.

A discussão sobre dependência, variáveis e construção de gráficos levou à redação das tarefas: (e) O número de partes depende do número de dobras; (f) utilizando a primeira tabela, construa o gráfico que mostra o número de partes em função do número de dobras.

Houve um momento em que os professores se encontraram diante de um impasse. Eles perceberam que a exclusão da identificação das variáveis geraria um problema: “Como explicar para o aluno que a variável independente é representada no eixo horizontal e a dependente, no eixo vertical?”

Os professores discorreram sobre os objetivos da atividade *Dobrando papel*: introduzir a dependência de duas ações possíveis de serem medidas; ver a relação que existe entre o número de partes e o número de dobras; levar o aluno a perceber o número de partes como potência de base dois; fazer uma ligação com o conhecimento anterior; colocar dados em uma tabela; construir gráfico e escolher escala.

Ao se comparar as discussões ocorridas no grupo, na primeira fase, com essa última, envolvendo todos os participantes, pode-se perceber avanços na formulação e escrita dos objetivos dessa atividade, agora mais coerentes com as tarefas propostas.

Constata-se um aprofundamento das análises *a priori*, devido à experiência adquirida na observação do experimento-piloto, uma ampliação da organização matemática, com a inclusão de tarefas e uma organização didática mais detalhada.

Uma atividade denominada *Brincando com palitos* foi escolhida por ser "bonitinha" e aparecer em diversos livros didáticos de oitava série. A organização didática da versão final, aplicada na sala de aula na quarta fase, não se distanciou muito das primeiras versões, mas o debate sobre generalização lançou um novo olhar sobre a mesma. A Figura 1 acompanha o enunciado de *Brincando com palitos.*

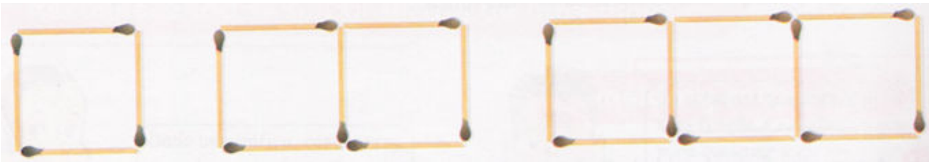

Figura 1-frisa de palitos

As tarefas propostas: (a) Observe a seqüência de retângulos formados com palitos de sorvete; (b) Com os palitos de sorvete que você recebeu, continue a seqüência e, em seguida, preencha a tabela abaixo.

N. de quadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N. de palitos										

(c) Como você poderia calcular o número de palitos necessários para formar uma "frisa" formada por 12 quadrados? Mostre os seus cálculos.

(d) Como você poderia calcular o número de palitos necessários para formar uma "frisa" formada por 100 quadrados? Mostre os seus cálculos.

(e) Se você tivesse 241 palitos, quantos quadrados conseguiria formar? Sobraria algum palito? Mostre os seus cálculos.

(f) Chamando de p quantidade de palitos e de q a quantidade de quadrados, escreva a expressão algébrica que relaciona o número de quadrados q com a quantidade de palitos p.

(g) Com os registros da tabela, construa o gráfico que mostra o número de palitos em função do número de quadrados.

(h) Os pontos estão alinhados?

(i) É possível unir os pontos do gráfico? Justifique sua resposta.

Durante a discussão dessa atividade, surgiram duas técnicas para determinar a expressão algébrica que relaciona o número de quadrados q com a quantidade p de palitos, surgiram duas técnicas: uma baseada na equação da reta, sem pensar no conhecimento prévio do aluno; a outra baseada em um processo de generalização: "Cada quadrado tem 4 palitos; 2 quadrados tem 8 palitos e tira 1, que é o lado comum; 3 quadrados tem 12 palitos e tira 2 ...; e assim por diante...acaba-se chegando a $p = 3 \times q + 1$."

Os professores consideraram importante trabalhar padrões com os alunos, mas confessaram que, no momento em que escolheram *Brincando com palitos*, não se preocuparam com as possíveis dificuldades dos alunos diante das diversas possibilidades de visualizar, de manipular o material, de contar, de verificar que diferentes expressões aparentemente distintas recaem na mesma fórmula. Concordaram que essa atividade não poderia ser proposta aos alunos na primeira aula e um dos professores sentenciou: "Esse exercício é muito perigoso, os colegas tomaram um susto."

Após a aplicação dessa atividade, os professores comentaram que não esperavam que os alunos pudessem resolvê-la com facilidade, sem manipular os palitos fornecidos a cada grupo de estudantes.

Dobrando papel e Brincando com palitos foram as duas atividades que envolveram a concepção de função como padrão de regularidade apresentadas e discutidas pelos professores.

Interdependência de duas grandezas

Desde a primeira fase, todos os professores trabalharam com atividades que tratam de relação entre grandezas. Eles partiram de cópias extraídas de livros didáticos, mas dois grupos (A e C) procuraram reformular e criar novas atividades.

O grupo A avançou, desde um primeiro roteiro formulado por um dos professores, onde se encontra a sugestão de "[...] Estabelecer o conceito de função no cotidiano. [...]" (Professor Juliano, 04/05/2004).

Esse grupo aproveitou uma atividade encontrada em um livro didático e experimentou diversas redações para as tarefas: construção de tabela, determinação da lei e construção do gráfico, mas não conseguiu tomar uma decisão sobre a redação final e abandonaram a atividade. Um ponto positivo é que eles ampliaram o número de tarefas que constavam no livro consultado e que os integrantes desse grupo explicitaram dúvidas sobre como explicar o que é uma tabela para um aluno.

Pode ser considerado um avanço a construção de uma nova atividade, a partir de uma situação do dia-a-dia, desde o seu enunciado e a criação de tarefas, a partir de uma realidade da sociedade brasileira: o restaurante por quilo. Por outro lado, não conseguiram fazer um levantamento das possíveis dificuldades dos alunos.

Esse grupo deu mais um passo ao perceber uma situação funcional em um livro de sétima série, em um capítulo sobre proporções, mapas e respectivas escalas. A partir de um mapa, criaram as tarefas: usar régua e medir distâncias e determinar as medidas reais entre duas cidades. A terceira tarefa refere-se a uma situação linear: “Podemos afirmar que a distância entre as duas cidades a qual chamamos de y será igual ao valor encontrado com o uso da régua, multiplicado pelo valor da escala?” (Professor Flávio, 25/06/2004). Mas essa atividade não foi retomada.

O grupo C, após uma leitura acrítica de atividades copiadas, começa um trabalho de criação. Quando um ambiente de colaboração se estabeleceu, os integrantes desse grupo começaram a falar abertamente sobre suas dificuldades: como pedir a construção de um gráfico, como pedir uma tabela ou como pedir uma expressão algébrica. A noção de variável emergiu, mas somente um dos integrantes desse grupo conseguiu escrever um texto de próprio punho, utilizando as palavras variação, alterar medidas, tabelas, reunir informações, relaciona e maneira algébrica.

Na tentativa de construir uma organização didática em torno da concepção de função como interdependência entre grandezas, os professores reconstruíam a organização matemática envolvida, o que se fazia por meio da explicitação de todos os passos necessários. Sobre gráficos: construir as retas, nomear os eixos, determinar a escala, identificar a variável independente, localizar os pontos, dizer a forma do gráfico, interpolar pontos. A respeito de tabelas, surgiram diversas propostas: organize os dados de lado e área; organize os registros de lado e área encontrados em relação à medida da área e do lado no espaço abaixo; registre os resultados encontrados; organize os resultados encontrados; construa uma tabela com esses dados; registre na tabela abaixo;

registre os resultados que você encontrou; registre os resultados que você obteve; registre os resultados que você observou.

Os professores reconheciam a importância de gráficos e de tabelas mas, diante de tantas dúvidas sobre como construir uma organização didática, aliadas às referentes aos conceitos envolvidos, ficaram confusos sobre qual seria a melhor redação para uma tarefa. Um marco importante, percebido pelos próprios professores, foi que eles estavam escrevendo juntos.

A seguir, apresenta-se a evolução da atividade denominada *Esvaziando reservatório*. A primeira versão foi trazida por César, um dos integrantes do grupo C. Nessa versão, o volume de água de uma caixa d'água aumentava em função do tempo, pois um dispositivo permitia a entrada de água. Duas novas versões foram produzidas coletivamente por dois professores desse grupo: César e Rosa; a terceira foi discutida coletivamente, na terceira fase, reformulada e aceita para ser aplicada em sala de aula na quarta fase.

A primeira versão continha um enunciado, um gráfico incompleto, sobreposto ao desenho de um paralelepípedo e apresentava uma única tarefa: determinar a expressão que relaciona o tempo e o volume. A terceira versão, denominada *Esvaziando reservatório*, propiciou momentos para debates sobre o conceito de taxa de variação, domínio de uma função e função definida por duas sentenças, a partir do texto produzido pelos professores Rosa e César, do grupo C.

O enunciado: Um reservatório de água com capacidade de 1000 litros está cheio. O registro é aberto para esvaziá-lo e um cronômetro é acionado no instante em que se inicia o escoamento, como ilustram as figuras abaixo.

Seguem os desenhos que mostram o esvaziamento de um reservatório e o visor de um cronômetro, como se pode ver na Figura 2.

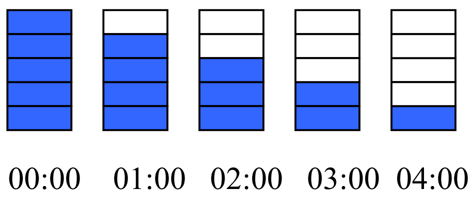

Figura 2 - Reservatório

Fonte: Material disponibilizado pelos professores César e Rosa

As tarefas propostas pela dupla:

(a) Observando as ilustrações acima, preencha a tabela:

Tempo (horas)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
Volume (litros)	1000		800						

(b) Represente no gráfico o que você observou na tabela.

(c) Para valores acima de 5 horas, quais seriam seus pares correspondentes em litros?

(d) Os pontos estão alinhados?

(e) É possível unir os pontos do gráfico? Justifique.

Os professores alteraram o enunciado, incluindo a palavra constante, após escoamento, pois o professor Juliano acreditava que os alunos teriam que aprender o que é *vazão*. Acrescentam a pergunta: “Qual é a vazão?”

Percebe-se a necessidade de discutir as noções de taxa de variação e de coeficiente angular da reta, diante da confusão feita por um dos professores entre taxa de variação e ângulo ao analisar um construído na lousa: volume de água no reservatório em função do tempo. Outro professor afirmou que nunca olhara para coeficiente angular como taxa de variação.

A partir da explicação dada pelo professor César sobre o terceiro item: “O aluno precisa entender o momento em que o gráfico acaba”, pois “para valores acima de cinco horas, a caixa fica vazia”, se estabeleceu uma discussão sobre o domínio da função. Os professores ficaram intrigados quando questionados sobre as duas possibilidades que poderiam ocorrer: desligar o cronômetro no instante que a caixa d’água não contiver mais o líquido ou deixá-lo ligado após o completo esvaziamento do reservatório. Decidiram incluir a pergunta: “Se o cronômetro continuar funcionando, qual a quantidade de água no reservatório no instante $t = 7$? Represente no gráfico essa situação.” Em seguida, apareceu a sugestão, que foi aceita, de mais uma pergunta: “Verifique se seu gráfico está representando a situação de o cronômetro continuar funcionando após o esvaziamento do reservatório.”

Um dos professores sugeriu que o aluno deveria fazer outro gráfico para valores de $t > 5$, pois lhe parecia haver ali uma outra função. Foi necessário retomar a questão de uma função definida por várias sentenças, assunto já debatido da primeira fase. Analisando o volume em função do tempo:

$$v(t) = \begin{cases} 1000 - 200t & \text{para } 0 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{para } t > 5 \end{cases}$$

César concluiu que a redefinição do domínio tornou a atividade mais interessante.

A seguir, os professores excluíram a questão sobre alinhamento de pontos e propuseram: “É necessário unir os pontos? Explique.” Eles se preocuparam com algumas possíveis respostas dos alunos, sobre o que fazer durante o fechamento desse item, caso as respostas dadas não fossem satisfatórias.

Apesar das divergências sobre colocar ou não uma questão sobre dependência, após algumas deliberações, os professores incluíram a seguinte pergunta: “O volume de água observado no reservatório depende do tempo transcorrido? Explique.”

Da frágil e incompleta organização didática inicialmente apresentada pelo professor César, na primeira fase dessa formação até a quarta e última versão da atividade *Esvaziando reservatório*, surgiu uma reformulação do enunciado com uma melhor apresentação visual, com o acréscimo de cinco desenhos que representam a face frontal do reservatório, graduada, indicando o nível de água em cada instante; acrescente-se que abaixo de cada desenho, está representado o visor de um cronômetro. Além disso, houve uma ampliação do número de tarefas e a inclusão de duas explicações, uma sobre a necessidade de unir os pontos e outra sobre o porquê de o volume de água depender do tempo transcorrido.

As discussões sobre taxa de variação fizeram com que os professores se conscientizassem da necessidade de introduzir e utilizar esse conceito em sala de aula.

A proposta de deixar o cronômetro ligado após o esvaziamento do reservatório provocará após a aplicação dessa atividade em sala, um acirrado debate entre alunos e professores na sala de aula, sobre o zero e o nada.

Durante a avaliação dos fatos ocorridos durante a aplicação da atividade, os professores, que atuaram como observadores, discorreram sobre o entrosamento (ou não) dos grupos de alunos, o desconhecimento dos termos *vazão* e *escoamento,* a compreensão (ou não) da noção de vazão e de taxa de variação. Acrescentaram as dificuldades dos alunos em fazer as transformações necessárias da notação de tempo no visor digital do cronômetro para a tabela, onde o tempo é dado em horas. Apresentaram um inventário dos acertos e erros cometidos pelos alunos observados ao construir o gráfico e procuraram achar explicações para algumas dessas construções.

Os idealizadores dessa atividade foram surpreendidos com o problema do zero. “No início, eu tinha pensado em discutir a parte negativa; eu não pensei que o zero fosse dar problema”, observou o professor César, referindo-se às questões que causaram a polêmica que encerrara aquela sessão: “Se o cronômetro continuar funcionando, qual a quantidade de água no reservatório no instante $t = 7$?” e “Como fica o gráfico para $t > 5$? Verifique se seu gráfico está representando esta situação”.

Os professores afirmaram que, sem sombra de dúvidas, valeu a pena ter incluído as questões que causaram o debate na sala de aula, caso do cronômetro continuar ligado após o esvaziamento do reservatório de água. Procuraram lembrar as palavras utilizadas pelos alunos: ”[...] ele dizia que zero litro não existe”, “[...] ele achava que tinha que parar o tempo” e “[...] ele achou que não tinha que contar mais tempo nenhum”.

Para o professor César, a história da atividade *Esvaziando reservatório* foi importante em diversos planos. Formular a atividade e disponibilizá-la para uma rodada de alterações que foram discutidas coletivamente; vivenciar a sua aplicação e o debate coletivo no final da sessão; atuar como observador e preencher a ficha de observação; posteriormente, relembrar e discutir os fatos ocorridos durante a aplicação, junto com as considerações feitas pelos outros professores e, finalmente, perceber a própria evolução de um projeto para outro.

Correspondência entre dois conjuntos

A concepção de função como correspondência entre dois conjuntos foi apresentada, no início da primeira fase, por um professor do grupo A. Seu material não foi levado em consideração pelos demais integrantes desse grupo. Constata-se que as tarefas propostas são insuficientes para distinguir função de relação em gráficos, tabelas, expressões algébricas, conjuntos formados por pares ordenados, diagramas de flechas. Não há explicações sobre a razão de ser dessas tarefas nem de técnicas para as mesmas.

No grupo B, a inquietação entre o que foi elaborado e a própria experiência apareceu nos diálogos entre as professoras Pérola e Margarida. A primeira mostrou-se preocupada com o fato de que a seqüência de atividades preparada pelo grupo não trazia o conceito de relação. Afirmou estar acostumada com situação-problema, a partir da qual trabalhava com relação e depois, função. Margarida disse que, nas suas aulas, abordava relação antes de função e acreditava ser necessário focalizar os dois conceitos simultaneamente. Lembrou que, no Ensino Médio, o aluno vai trabalhar com relação e função. Nesse momento, as duas professoras acreditaram que o conceito de relação deveria anteceder a primeira atividade - *Dobrando papel*.

A seguir, a professora Pérola lembrou ter utilizado as flechas até três anos atrás. Marcos disse que desistiu desse recurso no segundo ano de atuação no magistério e expôs as próprias dificuldades quando ainda era estudante. A professora Margarida lembrou autores de livros que utilizam diagrama de flechas. No final, a professora Pérola pareceu estar convencida de que o conceito de relação não é imprescindível no caso e que a seqüência elaborada atinge o objetivo proposto para a série.

Esse diálogo revela o quanto é forte a idéia de que se deve começar com a noção de relação entre dois conjuntos, para, em seguida, apresentar o diagrama de flechas. Acredita-se que a presença do tipo de tarefa – conceituar função em termos conjuntistas, presente em alguns livros didáticos de oitava série, aliada à formação inicial do professor dentro dos moldes do Movimento da Matemática Moderna, torna difícil o rompimento com essa tradição. Graças à troca de experiências e relatos de dificuldades pessoais, os professores se convenceram de não ser necessário introduzir relações e diagramas de flechas em uma oitava série, independente das sugestões encontradas nos PCNs (1998) de Matemática a respeito do assunto.

Máquina de entrada e saída

Uma das raízes históricas do conceito de função é considerá-la como uma máquina que faz algo. É olhar função como um processo de construção, que permite fabricar alguma coisa nova com elementos conhecidos, sendo dadas as condições de sua fabricação. Youschkevitch (1981, p.30), ao traduzir do latim o verbo utilizado por Leibniz, explica que *fungor, functus sum, fungi* significa executar, fazer cumprir.

A concepção de função como máquina de entrada e saída apareceu na atividade *Função como máquina*. Ela foi apresentada na primeira fase pelo Grupo B e é uma cópia fiel de uma atividade encontrada em um livro didático, exceto pelo desenho da máquina, mostrado na Figura 3. O enunciado descreve o que faz uma máquina criada por uma menina chamada Rosângela:

> Rosângela bolou uma máquina interessante. Ela está programada para "multiplicar o número de entrada por dois e a seguir, subtrair o resultado de uma unidade." Por exemplo, se entrar o número 8, sairá o número 15; se entrar o 20, sairá o 39. Note que os números de saída são obtidos em função dos números de entrada, isto é, os números que saem dependem dos números que entram.

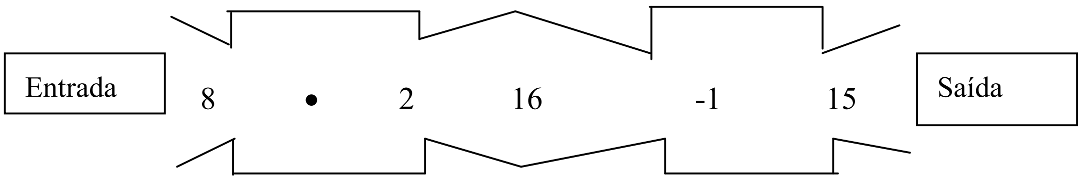

Figura 3 - O desenho da máquina de Rosângela

Fonte: Integrantes do Grupo B

A seguir, há uma tabela com números de entrada e saída da máquina:

N. de entrada	- 4/3	-1	-0,5	0	1/2	1,0	1,8	2	3	3,3	6
N. de saída			-2	-1							

As tarefas: (a) Complete a tabela com os números que faltam. (b) Se x representa a variável número de entrada e y a variável número de saída, qual a fórmula ou lei da função que fornece y em função de x? (c) Neste caso, qual é a variável dependente? (d) Se o número de entrada for 10, qual será o número de saída? (e) Se o número de saída for 29, qual será o número de entrada? (f) O número de saída varia de forma diretamente proporcional ao número de entrada? (g) Em uma folha de papel quadriculado, construa um gráfico com os dados da tabela.

Foi possível notar que os professores desse grupo não se questionaram sobre as dificuldades que os alunos poderiam ter para localizar pontos com coordenadas racionais nem com as possíveis resoluções gráficas que poderiam ser obtidas.

Função como máquina será retomada na terceira fase, ligeiramente modificada e incluída na seqüência de ensino. As discussões foram importantes, pois os professores conseguiram conceituar função como máquina, independente do desenho de uma particular máquina.

O professor Juliano percebeu que aquilo que acontece dentro da máquina da Rosângela constitui uma função e considerou que o aluno poderia ter o primeiro contato com a notação *f* nessa atividade.

O professor César apresentou suas dúvidas a respeito de como os alunos poderiam perceber a função como máquina e travou um debate com o professor Juliano.

César: "Função é a máquina, mas não dá a impressão de que efe é o número de entrada? Como eles vão acreditar que a máquina é a função?"

Juliano: "Qual é a função da máquina?"

César: "É mudar o número".

César sugeriu que se escrevesse "máquina, máquina,... uma hora o aluno cansa e põe m." Assim, ele passou do retórico ao sincopado, conseguindo perceber função como máquina. Considera-se a escrita retórica aquela que não utiliza símbolos; a escrita sincopada já utiliza algum tipo de abreviação.

Os professores terminaram a discussão concordando que a atividade *Função como máquina* era uma oportunidade para introduzir a notação *f* e incluíram a tarefa: Encarando a situação desta maneira e pensando na máquina da Rosângela, que está programada para multiplicar o número de entrada por dois e a seguir, subtrair o resultado de uma unidade, complete:

$$\mathrm{f}(2) = \quad \mathrm{f}(8) = \quad \mathrm{f}(20) = \quad \mathrm{f}(-1) = \quad \mathrm{f}(1{,}8) = \quad \mathrm{f}(\sqrt{3}) =$$

O interesse despertado por essa atividade e sua discussão ofereceu um ambiente propício para a aceitação e uso de $f(x)$. Isto foi um avanço, pois durante semanas os professores explicitaram uma "antipatia pelo $f(x)$", ou consideraram $f(x)$ uma "frescurinha", ou falavam sobre a "mágica" da troca de y por $f(x)$.

Lembra-se que um signo precisa de um significado e de um significante, $f(x)$ é um significante do objeto matemático *função*. Para designar este funcionamento do objeto ostensivo como signo, Bosch e Chevallard (1999, p. 109) revelam a força semiótica dos objetos ostensivos. Percebe-se que a semioticidade desse ostensivo emergiu pouco a pouco, a partir das discussões sobre dependência, correspondência e máquina que modifica o número de entrada. Os mesmos autores propõem a noção de instrumentalidade de um ostensivo da seguinte forma:

> O ostensivo tem um potencial instrumental, mas é somente no seu engajamento em um conjunto de técnicas institucionalmente determinadas, para executar determinadas tarefas, que faz dele um instrumento concretamente definido. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.107).

Os autores prosseguem dizendo que essa afirmação não tem um valor intrínseco. Ela só pode ser apreciada no quadro de uma organização matemática institucionalizada que inclui, além do objeto ostensivo considerado, todo um conjunto de objetos e inter-relações colocadas em jogo em determinadas praxeologias.

A fraca instrumentalidade do ostensivo $f(x)$ encontrada nos livros didáticos de oitava série faz com que ele perca sua força semiótica nesses livros, pois instrumentalidade e semioticidade caminham juntas, conforme propõem Bosch e Chevallard (1999, p. 111).

Um ponto importante é que na última sessão com os alunos, a professora formadora preparou folhas de *flip-chart*, com o intuito de fazer uma retomada das atividades já trabalhadas pelos alunos. Esse material amplia o alcance das atividades propostas na seqüência de ensino, pois para cada atividade, há tabela(s), gráfico(s), expressões algébricas e desenho(s) de máquina(s) com entrada e saída. O conceito de função foi institucionalizado naquela classe de uma nova maneira, sem uma definição formal, mas como uma proposta de articulação de organizações pontuais em torno das concepções de função trabalhadas em classe: função com padrão de regularidade, como interdependência de grandezas e máquina de entrada e saída, sob a égide de função como máquina.

Considerações finais

No início da formação, as organizações didáticas foram cópias daquelas propostas pelos autores de livros didáticos ou de apostilas. O acompanhamento da produção dos professores mostrou que à medida que eles investiam suas energias sobre como redigir uma tarefa, eles retomavam as noções matemáticas, ampliavam seu discurso tecnológico. Sentindo-se mais seguros sobre uma noção, eles conseguiam incluir novas tarefas nas atividades em construção.

Um marco importante é que o trabalho colaborativo ajudou a superar a barreira do *saber-fazer*, muitas vezes precário, para um *saber,* em termos chevallardianos, sobre funções.

A intrincada trama de vivências e reflexões levou os professores não só à elaboração de enunciados e tarefas para as atividades que compõem a seqüência de ensino, mas também a perceber e apresentar articulação de tipos de tarefas em torno do conceito de função, um discurso que vai além daquilo que se encontra nos livros didáticos. Assim, o professor se tornou produtor de conhecimentos e não só um técnico que aplicou uma tarefa proposta por um livro didático.

Todos os professores são apresentados à concepção de função como correspondência entre dois conjuntos na sua formação inicial. Mas foram as discussões sobre a organização didática em torno da concepção de função como máquina que levaram à (re)significação desse conceito, ao final de todo um processo de formação.

Implicações futuras

Acredita-se que são necessárias novas investigações sobre a formação de professores tendo como pano de fundo o conceito de função, com elaboração e aplicação de materiais instrucionais. Para tanto, deixa-se duas perguntas.

Quais organizações seriam mobilizadas se a seqüência fosse destinada a alunos do Ensino Médio?

Se a organização em torno da concepção de função como máquina não tivesse sido mobilizada, os professores teriam conseguido fazer a articulação das organizações mobilizadas?

Referências bibliográficas

ARTIGUE, M. Epistemologie et Didactique. Université Paris VII: **Cahier de Didirem**, n.3, 1989.

BARBIER, R. **A Pesquisa-ação**. Tradução: Lucie Didio. Brasília: Liber Livro Editora (Série Pesquisa em Educação, v.3), 2004.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l’ativité mathématique aux ostensifs Objet d’etude et problematique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.19, no 1, p.77-124, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**.1998. Disponível em <http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf >. Acesso em: 05 jan 2005.

CHEVALLARD, Y. Organizer l’ Etude. Strutures & Fonctions. In: 11a Ecole d’ Étê de Didactique des Mathematiques. 2001. Curso... Grenoble, 2001. CD-ROM.

_______________L’ analise des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v.19. n.2, p.221-265, 1999.

MONNA, A. F. The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. **Arch. For Hist. of Exact Sciences**, v.9, p.57-84,1972.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias**. 2006. Tese (Doutorado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2006.

YOUSCHKEVITCH, A. P. Le concept de fonction jusqu´au milieu du XIXe siècle.In: **Fragments d´historie des Mathématiques**, Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p.7- 67, 1981.